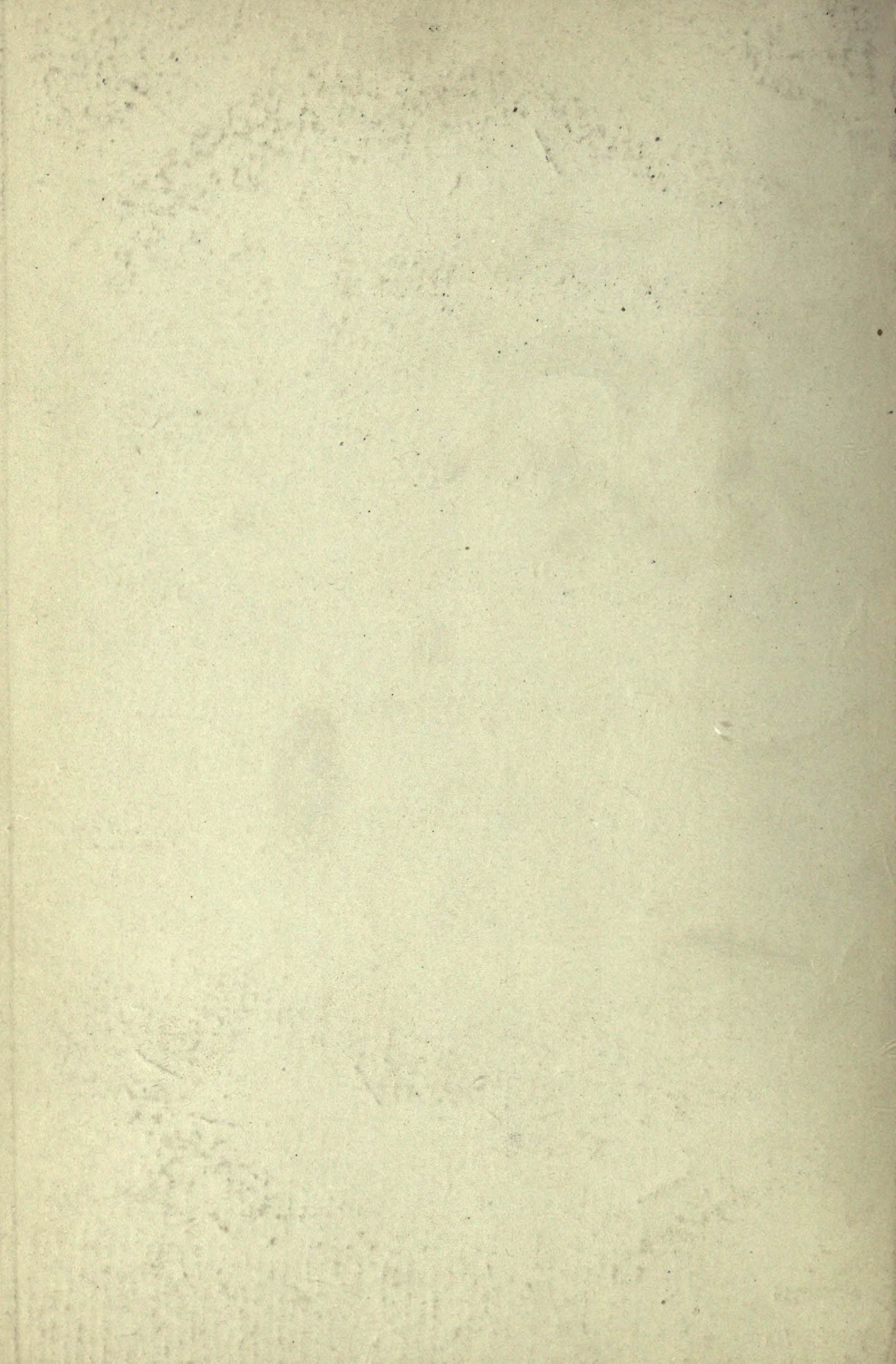
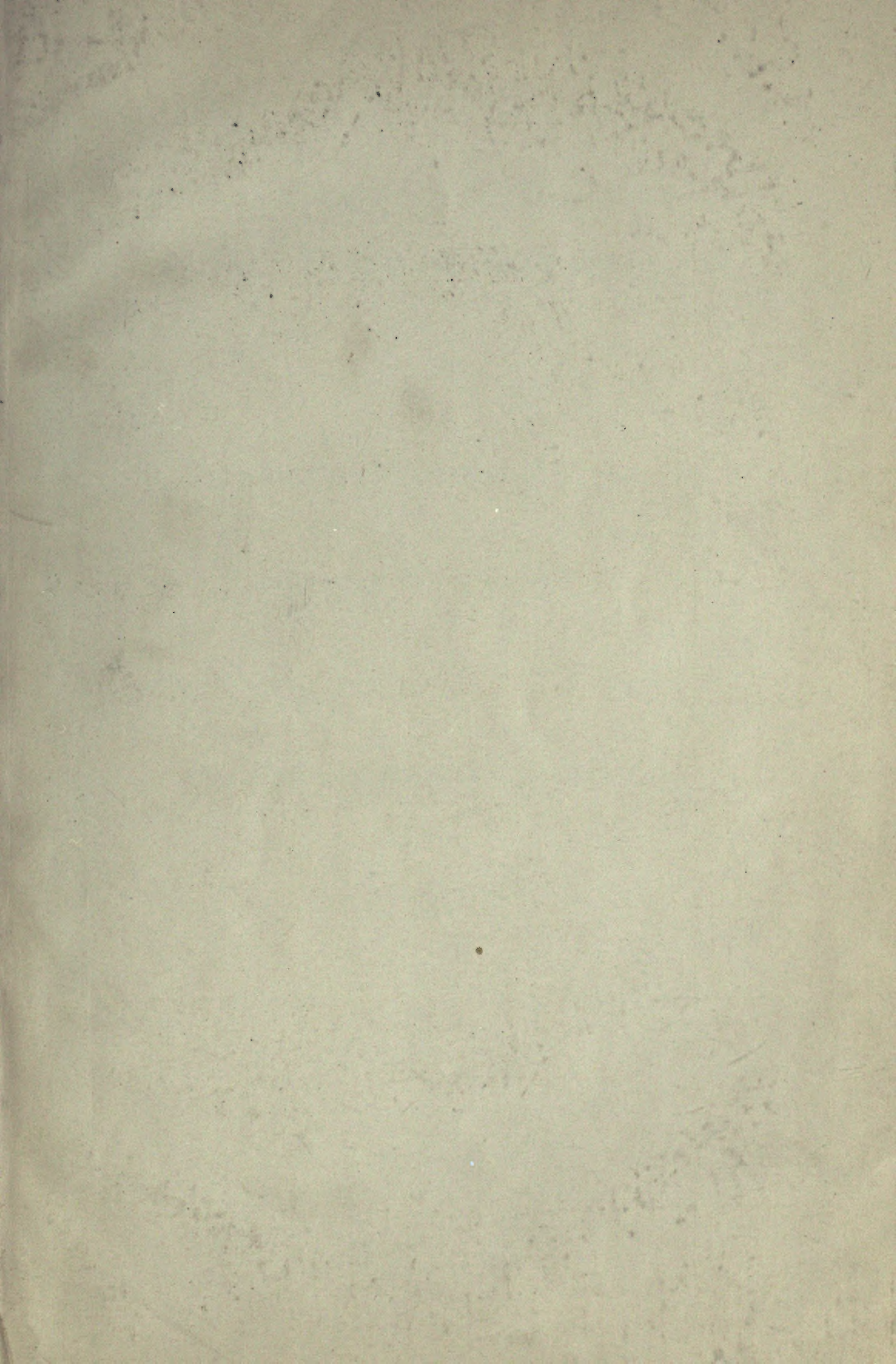
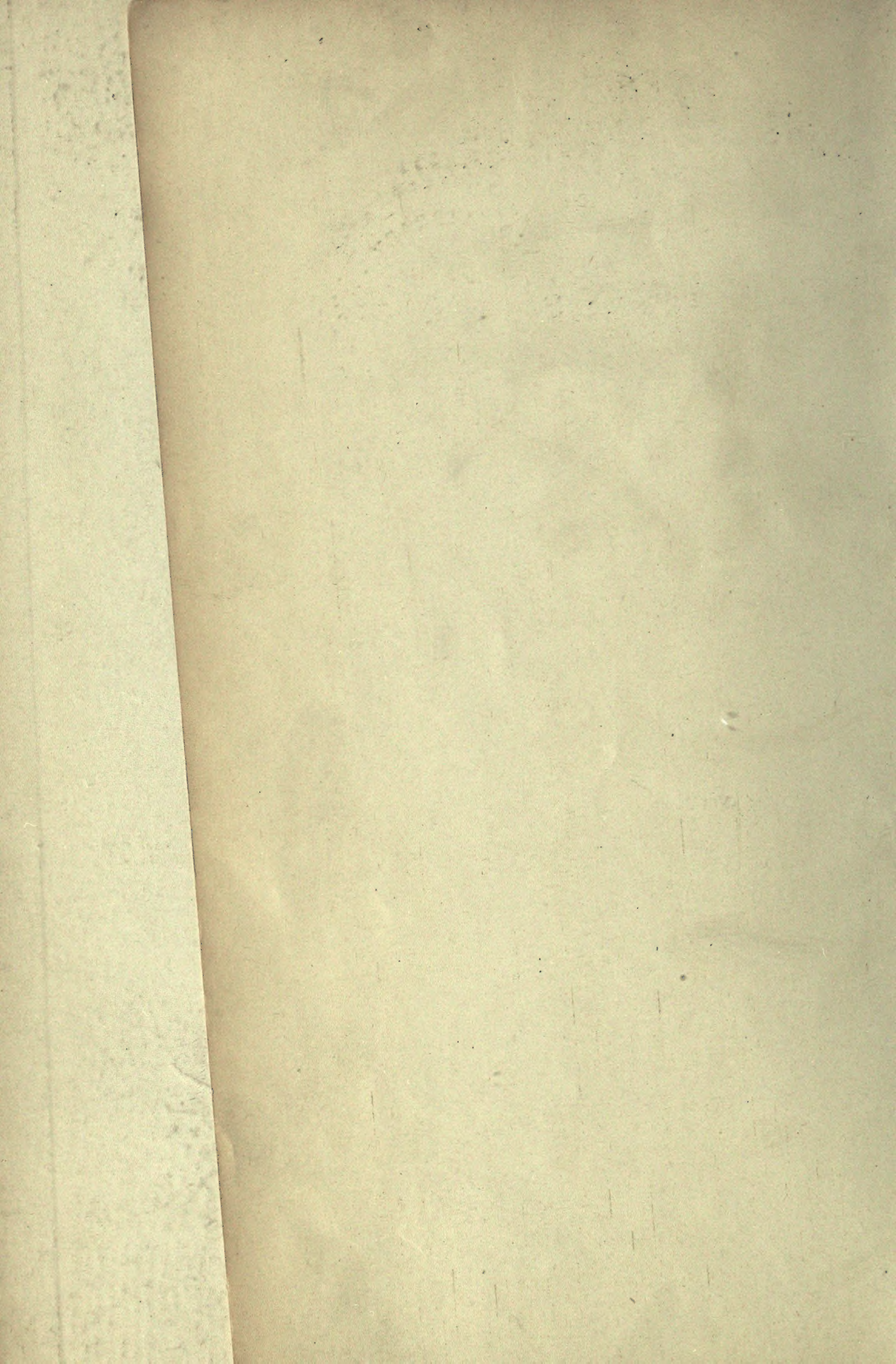










Analytische Funktionen

mit beliebig vorgeschriebenem unendlich-blättrigem Existenzbereiche.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

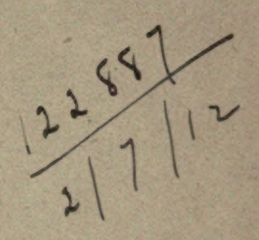
hohen philosophischen Fakultät

der

Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Erwin Freundlich
aus Biebrich a/Rh.



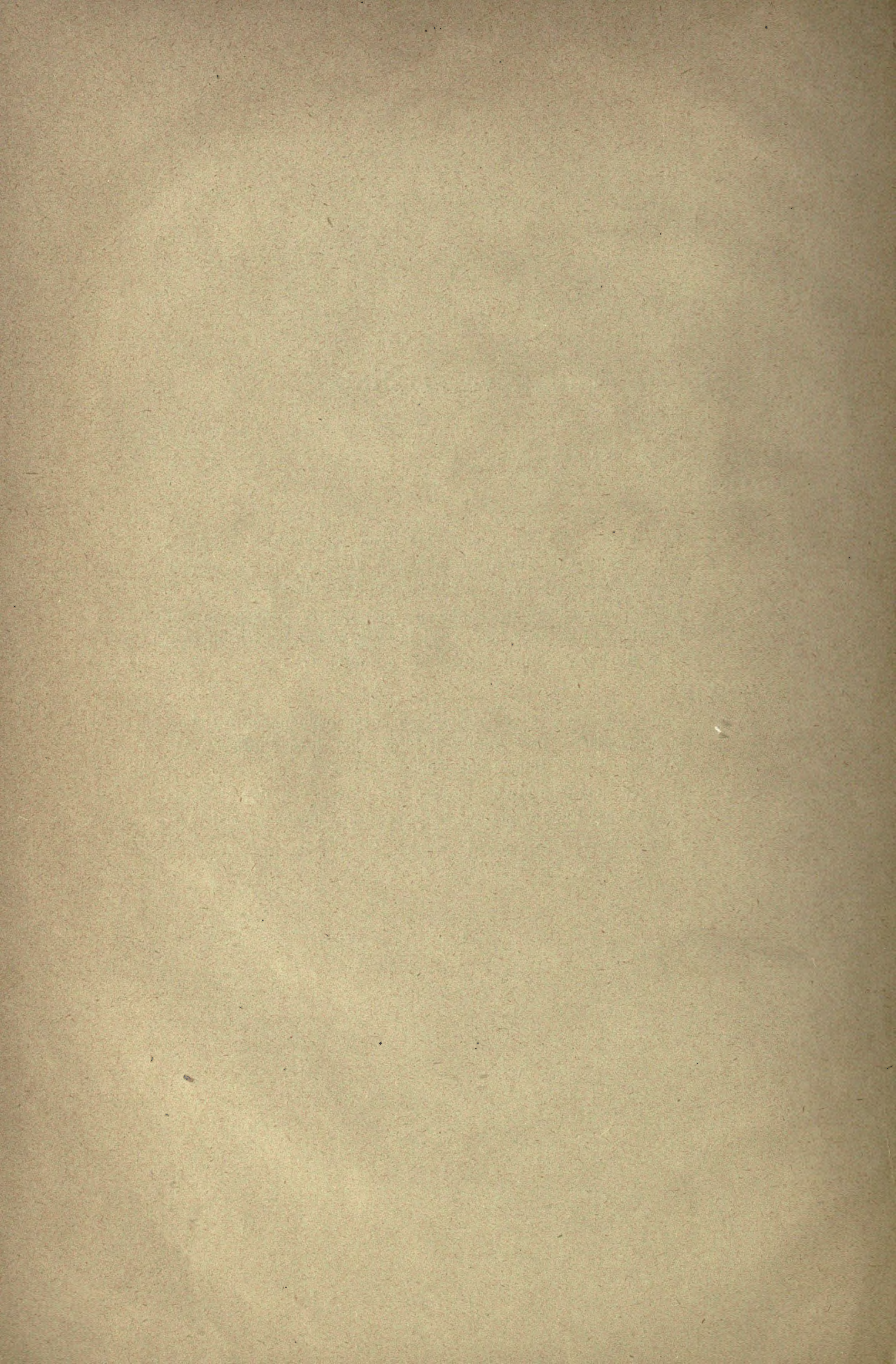
Göttingen 1910.
Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).



Tag der mündlichen Prüfung: 26. Januar 1910.

Referent: Herr Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. F. Klein.

Inhaltsverzeichnis.



Einleitung.

Inhalt der Abhandlung.

Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich mit der Existenz analytischer Funktionen auf beliebigen Riemannschen Flächen. Dabei gruppieren sich die Betrachtungen speziell um den Satz, daß ein jeder beliebig vorgeschriebener irgendwie berandeter Bereich, der sich nach Art einer Riemannschen Fläche über die Ebene ausbreitet, als Existenzbereich einer auf ihr eindeutigen analytischen Funktion aufgefaßt werden kann.

Dieser Satz wird nach zwei verschiedenen Methoden bewiesen.

Einer jeden analytischen Funktion $y(x)$ des komplexen Argumentes x entspricht eine Riemannsche Fläche, auf welcher die Funktion $y(x)$ als eindeutige Funktion des Ortes aufgefaßt werden kann. Diese Riemannsche Fläche stellt mit der Gesamtheit ihrer Innenpunkte den Existenzbereich der analytischen Funktion $y(x)$ dar, so weit dieselbe algebraischen Charakter hat. Etwa auf der Riemannschen Fläche vorhandene Grenzpunkte oder ganze Grenzlinien bilden die natürliche Grenze der Funktion, über die hinaus eine analytische Fortsetzung der Funktion unmöglich ist, isolierte Grenzpunkte speziell wesentlich singuläre Stellen derselben. Dabei gelten Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung und Häufungspunkte von Verzweigungsstellen endlicher oder unendlicher Ordnung als Grenzpunkte der Riemannschen Fläche.

Es ist nun die Frage von bedeutendem Interesse, ob man auch einen jeden beliebig nach Art einer Riemannschen Fläche ausgebreiteten Bereich von endlich oder unendlich hoher Blätterzahl in dem angegebenen präzisen Sinne als Existenzbereich einer auf ihr eindeutigen analytischen Funktion auffassen kann.

In zwei speziellen Fällen, dem Falle des beliebig begrenzten aber schlichten Gebietes[1]), und dem der geschlossenen algebraischen Fläche[2]) konnte diese Frage seit längerer Zeit bejaht werden. Für beliebige unendlich-blättrige Riemannsche Flächen hat kürzlich Herr Koebe den vollständigen Nachweis erbracht[3]).

Es gilt in der Tat der Satz I: F sei eine beliebige Riemannsche Fläche von endlich oder unendlich hoher Blätterzahl und endlich oder unendlich hoher Ordnung des Zusammenhangs. Die Gesamtheit ihrer Innenpunkte sei wohldefiniert, etwa vorhandene Grenzpunkte oder Begrenzungslinien werden nicht als zu dem Bereiche gehörig angesehen. Unter diesen allgemeinen Voraussetzungen gilt die Behauptung, daß F in dem obigen präzisen Sinne als Existenzbereich einer auf der Fläche eindeutigen, analytischen Funktion aufgefaßt werden kann. Ich will nun in dieser Abhandlung zwei weitere Beweise dieses Satzes zur Durchführung bringen, die sich dadurch von dem des Herrn Koebe unterscheiden, daß sie direkt mit gewissen eindeutigen Funktionen der Fläche bezw. automorphen Funktionen des Fundamentalbereiches arbeiten, der durch konforme Abbildung der geeignet aufgeschnittenen Riemannschen Fläche entsteht, und nicht mit Potentialen der Fläche, wie es in der erwähnten Arbeit geschieht.

Der Plan dieser Abhandlung ist folgender: Das erste Kapitel bringt einen Beweis des Satzes I für solche Riemannsche Flächen, die schon durch endlich viele nicht zerstückende Rückkehrschnitte schlichtartig werden. Diese Beschränkung rührt daher, daß sich der Beweis auf ein Theorem stützt, das schon für sich gewisses Interesse beansprucht, das ich aber bis jetzt nur für solche Flächen beweisen kann. Dieses Theorem lautet:

Auf einer beliebigen nicht geschlossenen endlich oder unendlich blättrigen Riemannschen Fläche,

---

1) Mittag-Leffler, Acta Math., Bd. IV, 1884 und C. Runge, „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen", Acta Math., Bd. IV, 1884.

2) B. Riemann, Inauguraldissertation, Göttingen 1851, abgedruckt in den Ges. Werken, S. 1; Crelles Journal, Bd. 54, 1857. H. A. Schwarz, Monatsberichte der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrg. 1870, abgedruckt in den Ges. Abh., Bd. 2. C. Neumann, Berichte der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1870. D. Hilbert, Ueber das Dirichletsche Prinzip, Festschrift zur Feier des 150jähr. Bestehens der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1901.

3) Comptes rendus 1909: Fonction potentielle et fonction analytique ayant un domaine d'existence donnée à un nombre quelconque fini ou infini de feuillets.

welche jedoch schon durch endlich viele Rückkehrschnitte schlichtartig wird, existiert eine eindeutige, analytische Funktion, die nur in einem beliebig vorgeschriebenen Punkte des Gebietes von erster Ordnung unendlich wird. (Bei einer geschlossenen, algebraischen Riemannschen Fläche tritt nur, wenn das Geschlecht $p = 0$ ist, eine solche Funktion auf.)

Nachdem ich im ersten Paragraphen den Beweis dieses Satzes erbracht habe, folgt im zweiten ein Beweis von I mit der erwähnten Einschränkung. Um diese Einschränkung zu beseitigen, nehmen wir dann im zweiten Kapitel die Resultate zu Hülfe, die uns durch das allgemeine Uniformisierungstheorem beliebiger analytischer Kurven gegeben werden und mit welchen dann auch ein allgemeiner Beweis von Satz I möglich wird.

Im ersten Paragraphen des zweiten Kapitels konstruiere ich zunächst die zu der gegebenen Riemannschen Fläche gehörende einfach zusammenhängende Ueberlagerungsfläche, und bringe dann in den Hauptgedanken den Abbildungssatz für einfach zusammenhängende Bereiche nach Koebe [1]), um den Existenzbeweis der Ueberlagerungsfläche organisch mit dem folgenden verknüpfen zu können. Im zweiten Paragraphen folgt dann der zweite Beweis des Satzes I für ganz allgemeine Riemannsche Flächen nach Methoden, die der Theorie der automorphen Funktionen entnommen sind [2]).

Voraussetzungen und Art der Beweisführung.

Um den Charakter der Arbeit möglichst geschlossen zu bewahren, habe ich versucht die Beweise auf Resultate der oben zitierten zweiten Mitteilung des Herrn Koebe zurückzuführen, soweit sie Sätze über die konforme Abbildung betreffen. Dies hat zur Folge, daß ich im zweiten Kapitel speziell das Uniformisierungstheorem für den Grenzkreisfall voraussetzen werde, also die Betrachtungen in ein Grenzkreispolygon als Fundamentalbereich verlege. Doch ist der dann nachfolgende Beweis des Satzes I durchaus von dem Typus der gewählten uniformisierenden Variabelen unabhängig. Nur bei dem Beweise des Satzes von der Existenz einpoliger Funktionen auf nicht algebraischen Flächen muß ich im

---

1) P. Koebe, Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, 2. Mitteilg., Göttinger Nachrichten 1907.

2) Ich bin Herrn Koebe für die Aufforderung, diesen Ueberlegungen nachzugehen, speziell verpflichtet.

allgemeinen Falle zu Resultaten der dritten Mitteilung[1]) des Herrn Koebe greifen.

Wir werden es im folgenden des öfteren mit ideal zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten zu tun haben, worunter wir Gebiete verstehen, die nicht aus einem zusammenhängenden Stück bestehen, sondern aus verschiedenen Teilen, die aber durch analytische Beziehungen partiell konform aufeinander bezogen und dadurch zu einem Ganzen verschmolzen sind. Wir werden aber die Beweisführungen stets bis auf den Punkt reduzieren, daß wir nur die Randwertaufgabe der Potentialtheorie für gewöhnlich zusammenhängende, nicht erst ideal zusammenhängende Gebiete vorauszusetzen haben.

Die Methode der Beweisführung für den Satz I ist folgende; man versucht aus gewissen Elementen sich Funktionen aufzubauen, die an den Grenzpunkten und Begrenzungslinien wesentlich singulär werden, so daß sie nicht über dieselben hinweg analytisch fortgesetzt werden können. Diese Grundelemente werden im ersten Kapitel die einpoligen Funktionen der gegebenen Riemannschen Fläche sein, im zweiten Kapitel gewisse Poincarésche Reihen des betrachteten Fundamentalbereiches[2]).

Hauptteil.

Kapitel I.

§ 1.

In dem ersten Paragraphen dieses Kapitels handelt es sich um den Beweis des Satzes:

Ist F eine beliebige, nicht geschlossene Riemannsche Fläche, von endlich oder unendlich großer Blätterzahl und endlich oder unendlich hoher Ordnung des Zusammenhangs, welche jedoch im letzteren Falle schon durch endlich viele Rückkehrschnitte schlichtartig wird, so existiert auf F eine analytische Funktion $f(x)$ des komplexen Argumentes x, die für alle

---

1) P. Koebe, Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, 3. Mitteilg., Göttinger Nachrichten 1908, S. 337.

2) Acta Math., Bd. 1, 1882, S. 1.

Innenpunkte von F mit dem Charakter algebraischer Funktionen eindeutig definiert ist, und nur in einem beliebig vorgeschriebenen Punkte auf F einen Pol erster Ordnung hat.

Sind Grenzpunkte oder ganze Grenzlinien auf F vorhanden, so werden diese als nicht zum Bereiche gehörig betrachtet, dabei gelten Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung und Häufungspunkte von Verzweigungspunkten endlicher Ordnung als Grenzpunkte.

Unter den Riemannschen Flächen betrachteter Art werden wir nun folgende Unterscheidungen treffen:

Ia: F ist endlich vielfach zusammenhängend und *schlichtartig*. (Einen Bereich nennen wir dabei mit Koebe *schlichtartig*, wenn er durch einen jeden auf ihm geschlossenen Linienzug zerstückt wird.)

Ib: F ist endlich vielfach zusammenhängend aber nicht schlichtartig, dann genügen sicher schon endlich viele nicht zerstückende Rückkehrschnitte, um F schlichtartig zu machen.

IIa: F ist unendlich vielfach zusammenhängend und schlichtartig.

IIb: F ist unendlich vielfach zusammenhängend aber nicht mehr schlichtartig; in diesem Falle müssen wir dann noch die Bedingung einführen, daß nur endlich viele Rückkehrschnitte nötig sein sollen, um F schlichtartig zu machen. In dieser Bedingung liegt die Einschränkung, welcher der Beweis unseres Satzes unterworfen ist. Für derartige Flächen beweisen wir nun zuerst das Theorem:

Ist F eine beliebige Riemannsche Fläche, der unter Ia—IIb betrachteten Art, so kann F umkehrbar eindeutig und konform auf einen Bereich abgebildet werden, der Teilbereich einer geschlossenen, algebraischen Riemannschen Fläche ist[1]).

Die Fälle Ia und Ib werden wir zuerst verfolgen; für sie können wir dieses Theorem mit Hülfe von Resultaten der oben zitierten „zweiten Mitteilung“ beweisen. In den Fällen IIa und IIb dagegen müssen wir die Resultate aus der „dritten Mitteilung“ heranziehen. Die Beendigung des Beweises des an die Spitze gestellten Satzes bietet sodann keine Schwierigkeiten mehr.

Ob die Fläche F schon schlichtartig ist oder erst durch Rückkehrschnitte schlichtartig wird, hat auf die Beweisführung des

---

1) Vergleiche verwandte Ueberlegungen bei Koebe „Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven“, 3. Mitteilg., Göttinger Nachrichten 1908, S. 344.

obigen Theorems so wenig Einfluß, daß wir keine besondere Trennung dieser beiden Fälle vornehmen wollen. Wo sich ein Unterschied in ihrer Behandlung zeigt, werden wir es jedesmal andeuten; man kann den Fall Ia einfach als den Spezialfall $p = 0$ in Ib auffassen, wobei p die Anzahl der notwendigen Rückkehrschnitte bezeichnen soll, die F schlichtartig machen.

Zerlegung von F in Teilbereiche.

Wir denken uns auf F p nicht zerstückende Rückkehrschnitte gezogen, die F schlichtartig machen; der hierdurch entstehende Bereich F' sei $(2p+q)$fach zusammenhängend. Diesen Bereich F' zerlegen wir darauf durch ein System geschlossener Linien $L_1 \ldots L_q$ in q zweifach zusammenhängende und ein $(2p+q)$fach zusammenhängendes Gebiet. Wie diese Linien in Wahrheit auf F' zu ziehen wären, da man ja über die Lage der Grenzlinien und Grenzpunkte auf F' keinen genaueren Einblick zu haben braucht, kann man sich folgendermaßen vorstellen. Das Gebiet F' ist $(2p+q)$fach zusammenhängend, da außer den p Rückkehrschnitten noch q Grenzlinien oder Grenzpunkte der Fläche als Begrenzung auftreten, wie wir angenommen haben. Da F' schlichtartig ist, so wird es durch eine jede auf ihr geschlossene Linie zerfallen, eine jede geschlossene Linie schneidet also ein Flächenstück heraus, sodaß die Ordnung des Zusammenhangs des übrigen Teiles von F' sich im allgemeinen um eine Einheit erhöht. Nur dann, wenn dieser Linienzug eine Grenzlinie oder einen einzigen Grenzpunkt umfaßt, bleibt die Zusammenhangszahl unverändert $2p+q$ für die restierende Fläche. Wenn wir also auf F' q getrennt verlaufende, geschlossene Linienzüge ziehen, so daß nach der Entfernung der q herausgeschnittenen Flächenstücke das Gebiet unverändert die Ordnung $(2p+q)$ des Zusammenhangs hat und die p Rückkehrschnitte enthält, so sind diese Linienzüge von der gewünschten Art und umfassen ein jedes eine Grenzlinie oder einen Grenzpunkt von F'. Die herausgeschnittenen Flächenstücke selbst sind natürlich zweifach zusammenhängend, wir wollen sie mit $b_1 \ldots b_q$ bezeichnen. Das von den Ufern der Rückkehrschnitte und den q Linien $L_1 \ldots L_q$ begrenzte Gebiet wollen wir F_q nennen.

Abbildung der zweifach zusammenhängenden Bereiche b_ν auf Kreisringe.

Einen jeden der q Bereiche b_ν bilden wir jetzt konform auf die Fläche eines von zwei konzentrischen Kreisen begrenzten

schlichten Ringes ab, was nach den Resultaten der „zweiten Mitteilung“ des Herrn Koebe möglich ist.

Von den q zweifach zusammenhängenden Bereichen greifen wir z. B. b_1 heraus, der von der geschlossenen Linie $\mathfrak{L}_1$ und einer von den q Grenzlinien oder Grenzpunkten berandet wird.

Innerhalb b_1 ziehen wir nun ein System geschlossener Linienzüge $\lambda_1 \ldots \lambda_\nu \ldots$, die sich gegenseitig umschließen und jedes mit $\mathfrak{L}_1$ zusammen ein endlich-blättriges Gebiet α_ν begrenzen. Für jeden dieser Bereiche α_ν kann man nun die Existenz der Greenschen Funktion behaupten, welche in einem beliebig herausgegriffenen Punkte 0, der schon innerhalb α_1 liege, unendlich wird wie $\lg \frac{1}{r}$ und auf der Begrenzung verschwindet. Den verschiedenen Bereichen α_ν entsprechend, erhalten wir so eine Folge von Potentialen $u_1, u_2, \ldots$, welche im Limes auf ein Potential u führen, die Greensche Funktion des Bereiches b_1

$$\lim_{n=\infty} u_n = u.$$

Die Konvergenz dieser Potentiale läßt sich mit Hülfe des Harnackschen Satzes beweisen, indem man die Konvergenz in einem Punkte des Bereiches nachweist oder man wendet ein indirektes Schlußverfahren an, wie es in der oben erwähnten Arbeit geschieht (S. 638). Die dortigen Ueberlegungen brauchen dabei nur insofern modifiziert werden, daß an Stelle des Kreises K_0 hier die Linie $\mathfrak{L}_1$ tritt und an Stelle des Kreises K_1, der durch einen Punkt A des Gebietes hindurchläuft (in diesem Punkte hat man Divergenz der Potentiale angenommen), ein geschlossener $\mathfrak{L}_1$ umfassender Linienzug.

Die Greensche Funktion u des Gebietes b_1 benötigen wir deshalb, weil sie uns später als Majorante für eine andere Folge von Greenschen Funktionen dienen soll, die für eine Reihe einfach zusammenhängender Gebiete definiert sind.

Um nämlich die gewünschte konforme Abbildung von b_1 auf einen Kreisring nachweisen zu können, beweist man erst, daß die einfach zusammenhängende Ueberlagerungsfläche B_1 von b_1 auf das Innere des Einheitskreises abgebildet werden kann. Wie die einfach zusammenhängende Ueberlagerungsfläche hergestellt wird, ist in erwähnter Arbeit genau ausgeführt. Sie erscheint als Grenzfläche einer Folge von einfach zusammenhängenden Gebieten $B^{(i)}$. War 0 die Unstetigkeitsstelle der vorher aufgestellten Greenschen Funktion u zu b_1, so können wir zu jedem der Bereiche B^i nun

die Greensche Funktion aufstellen, die auch 0 zur logarithmischen Unstetigkeitsstelle hat. Die Folge der so erhaltenen Potentiale g_i konvergiert nun gleichmäßig gegen die Greensche Funktion u_B der Ueberlagerungsfläche B_1, da man nachweisen kann, daß u aufgefaßt als Funktion des Ortes auf B eine Majorante für die Potentiale g_i darstellt. Es zeigt sich ferner auch, daß u_B stetig in den Wert 0 übergeht, wenn man sich dem Rande nähert. Damit ist die Abbildung von B auf das Innere des Einheitskreises gegeben, denn dieselbe wird vermittelt durch die Funktion:

$$Z = e^{-(u_B + iv_B)},$$

wobei v_B das zu u_B konjugierte Potential bedeutet. Bei dieser Abbildung der einfach zusammenhängenden Ueberlagerungsfläche auf das Innere des Einheitskreises, geht das einfach zusammenhängende Gebiet, das aus b_1 durch Aufschneiden längs eines Querschnittes (eine solche Aufschneidung wird bei der Herstellung der einfach zusammenhängenden Ueberlagerungsfläche vorgenommen) — entsteht, in einen Bereich E über, der ganz innerhalb des Einheitskreises liegt und in gewissen Strecken an die Peripherie heranragt. Die zwei Seiten, die den verschiedenen Ufern des Querschnittes entsprechen, sind dabei vermittelst einer hyperbolischen oder parabolischen Substitution aufeinander bezogen. Im ersten, hyperbolischen, Falle gelangt man durch eine lineare Transformation von der Ebene des Einheitskreises zu einer ζ-Ebene, in welcher der Bereich die Gestalt des schraffierten Gebietes in Figur 1 annimmt.

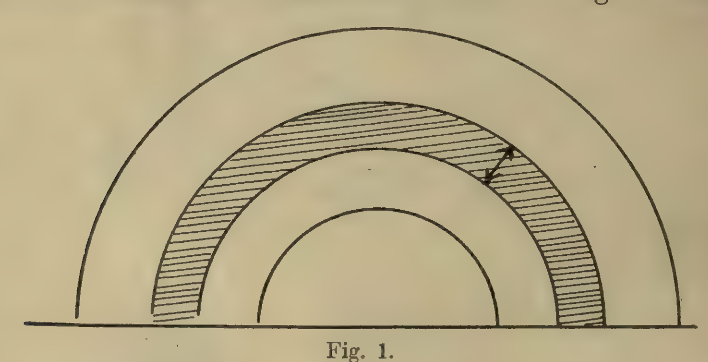


Fig. 1.

Die Funktion:

$$Z = \zeta^{\frac{2\pi i}{\lg c}} \quad \lg c \text{ reell}$$

bildet dann diesen Bereich auf einen konzentrischen schlichten Kreisring ab, dessen innerer Begrenzungskreis der von $\mathfrak{L}_1$ umschlossenen Grenzlinie entspricht. Im Falle einer parabolischen

Substitution zeigt sich dagegen, daß die Linie $\mathfrak{L}_1$ nur einen Grenzpunkt der ursprünglichen Fläche F umschließt, sodaß der zweifach zusammenhängende Bereich b_1 auf den Einheitskreis exclusive des Nullpunktes abgebildet werden kann. Um dies zu erreichen, geht man von der Ebene, auf welche die Ueberlagerungsfläche abgebildet wurde, durch eine lineare Transformation zu der ξ-Ebene über, in welcher der Bereich E als Parallelstreifen erscheint (siehe Figur 2).

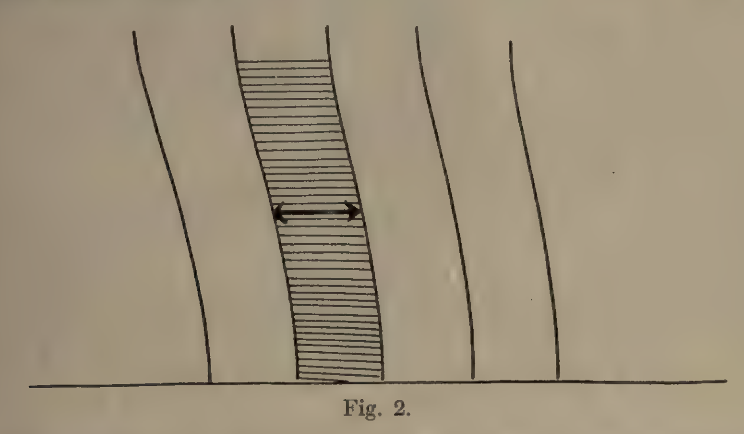


Fig. 2.

Die gewünschte Abbildung wird dann durch die Funktion:

$$Z^* = e^{\frac{2\pi\xi i}{c}}$$

vermittelt. Den bisher besprochenen Abbildungsprozeß denken wir uns also für alle q zweifach zusammenhängenden Gebiete b_ν durchgeführt, und erhalten dadurch q Kreisringe oder punktierte Vollkreise, die wir mit $k_1 \ldots k_q$ bezeichnen wollen.

Der nun folgende Schritt in unseren Ueberlegungen ist der, daß wir von jedem Gebiet k_i zu dem entsprechenden Vollkreise K_i übergehen, indem wir das durch die innere Begrenzung von jedem k_i ausgeschaltete Stück, das ist den inneren Kreis oder den Mittelpunkt zu dem Bereiche hinzunehmen.

Dieser Vorgang bedeutet gewissermaßen ein Schließen der auf F durch die Grenzpunkte und Begrenzungslinien erzeugten Löcher, so daß die Riemannsche Mannigfaltigkeit:

$$\Phi = (F_q + K_1 + K_2 + \cdots + K_q)$$

infolge der zwischen den Rändern bestehenden Beziehung eine ideal geschlossene algebraische Mannigfaltigkeit darstellt. Unser ursprüngliches Gebiet F erscheint dabei als Teilbereich derselben.

Uebergang zu einer gewöhnlichen algebraischen Riemannschen Fläche.

War F von Anfang an schlichtartig, so ist Φ eine ideal geschlossene Fläche des Geschlechtes $p = 0$ und kann somit konform auf die Vollkugel abgebildet werden. Im Falle Ib dagegen muß man den Prozeß des Abschließens über die Begrenzungslinien außerdem noch bei den p Rückkehrschnitten ausführen, bevor die Abbildung auf die Vollkugel möglich wird. Diese Abbildung wollen wir deswegen ausführen, weil nach ihr Φ als ein auf der Kugel schlicht ausgebreiteter Bereich erscheint, der von $2p$ getrennt verlaufenden, zu Paaren analytisch auf einander bezogenen Kurven begrenzt wird. Ein solcher Bereich ist, wie wir aus der Theorie der automorphen Funktionen als bekannt voraussetzen können, einer algebraischen Riemannschen Fläche äquivalent.

Wir führen die Ueberlegungen wieder am Falle Ib durch. Zuerst schließen wir über die p Rückkehrschnitte r_ν ab; da es hierbei von Wichtigkeit ist, daß bei der späteren Abbildung auf die Vollkugel, zu der wir die Methode der gürtelförmigen Verschmelzung heranziehen werden, dieselbe längs der Rückkehrschnitte durchaus regulär ist, so leiten wir den Prozeß der Verschmelzung so ein, daß die Rückkehrschnitte als innere Linien auftreten. Wir legen deshalb entlang der beiden Ufer eines jeden Rückkehrschnittes r_ν zwei geschlossene Linien $l_{\nu 1} l_{\nu 2}$, in der Figur durch 1, 2 markiert, und erweitern die Fläche über die Ufer des Rückkehrschnittes hinweg bis zu zwei wiederum geschlossenen Begrenzungslinien $l_{\nu 3}$ und $l_{\nu 4}$, welche in der Figur mit 3, 4 bezeichnet sind.

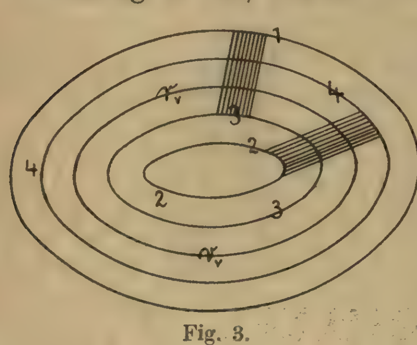


Fig. 3.

Einen jeden der zweifach zusammenhängenden Ringe zwischen (1, 3) und (2, 4), wir wollen sie $\beta_{\nu 1}$ und $\beta_{\nu 2}$ nennen, bilden wir dann auf einen schlichten konzentrischen Kreisring ab und decken die von der inneren Peripherie begrenzte Kreisfläche zu. Der äußere Begrenzungskreis umschließt ein Flächenstück, das wir mit $R_{\nu 1}$, $R_{\nu 2}$ bezeichnen wollen, je nachdem diese Peripherie $l_{\nu 1}$ bezw. $l_{\nu 2}$ entspricht. Die resultierende ideal geschlossene Fläche

$$\Psi = (\Phi + R_{11} + \cdots + R_{p2}) = (F_q + K_1 + \cdots + K_q + R_{11} + \cdots + R_{p2})$$

ist vom Geschlechte $p = 0$ und kann folglich auf die Vollkugel konform abgebildet werden.

Die Methode der gürtelförmigen Verschmelzung liefert uns die hierbei erforderlichen Werkzeuge[1]).

Wir markieren einen Punkt 0 in F und legen um ihn zwei Kreise L_1 und L_2 mit den Radien ϱ_1 und ϱ_2; $\varrho_1 < \varrho_2$. Das Gebiet außerhalb L_1 auf Ψ nennen wir T_1, es hängt nur ideal zusammen; dasjenige innerhalb L_2 nennen wir T_2. Ferner ziehen wir noch innerhalb eines jeden der zweifach zusammenhängenden Gebiete b_ν eine geschlossene Linie $\mathfrak{L}'_\nu$, welcher in dem entsprechenden Kreisringe k_i ein konzentrischer Kreis entspricht.

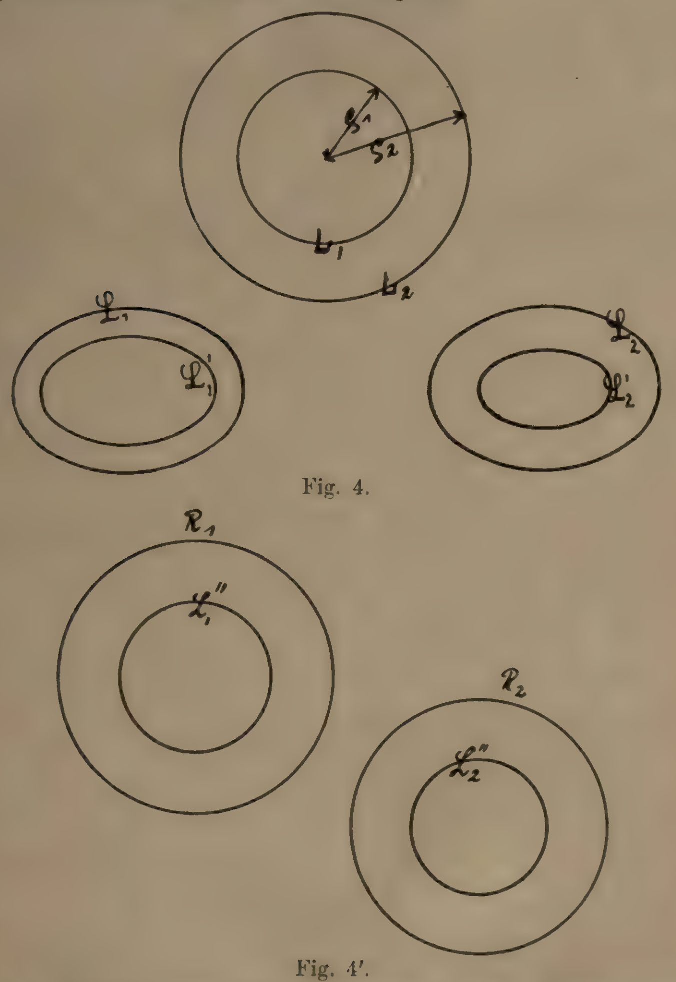


Fig. 4.

Fig. 4′.

1) H. A. Schwarz, „Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta(u) = 0$“. Monatsberichte der kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1870, abgedruckt in den Ges. Abhandlungen, Bd. 2, S. 144.

Wir verfolgen nun den ersten Schritt der Abbildung an der symbolischen Figur 4, 4′, in der die zwei Kreise L_1 und L_2 und zwei der zweifach zusammenhängenden Gebiete zwischen $\mathfrak{L}_i$ und $\mathfrak{L}_i'$ angedeutet sind; in Figur 4′ sind die entsprechenden zwei Vollkreise K_i bezw. $R_{\nu i}$ $(i = 1, 2)$ gezeichnet. Das Gebiet, das von L_1 und $\mathfrak{L}_1'$, $\mathfrak{L}_2'$ begrenzt wird heiße T_1'. Wir definieren nunmehr mit u_1 ein positives Potential innerhalb T_1', das auf L_1 die Randwerte $\varrho_1^{-1}\cos\varphi$ annimmt und auf $\mathfrak{L}_1'$ und $\mathfrak{L}_2'$ irgendwelche Werte $W_1(r\varphi)$, $W_2(r\varphi)$. Seine Werte auf $\mathfrak{L}_1$ bezw. $\mathfrak{L}_2$ übertragen wir auf R_1 und R_2 und bezeichnen jetzt mit $u_2^{(1)}$, $u_2^{(2)}$ die zwei Potentiale, die innerhalb der Kreise R_1 und R_2 regulär sind und diese Randwerte auf der Peripherie annehmen. Den zwei Linienzügen $\mathfrak{L}_1'$ und $\mathfrak{L}_2'$ entsprechen vermöge der oben besprochenen konformen Abbildungen der b_i bezw. $\beta_{\nu i}$ auf Kreisringe zwei konzentrische Kreise in R_1 und R_2, die $\mathfrak{L}_1''$ und $\mathfrak{L}_2''$ heißen sollen.

Die Werte, die nun $u_2^{(1)}$ und $u_2^{(2)}$ auf $\mathfrak{L}_1''$ und $\mathfrak{L}_2''$ annehmen, übertragen wir zurück auf $\mathfrak{L}_1'$ und $\mathfrak{L}_2'$ und definieren ein weiteres Potential u_3 innerhalb T_1', das wieder auf L_1 gleich $\varrho_1^{-1}\cos\varphi$ und auf $\mathfrak{L}_1'$ gleich $(u_2^{(1)})_{\mathfrak{L}_1'}$ auf $\mathfrak{L}_2'$ gleich $(u_2^{(2)})_{\mathfrak{L}_2'}$ ist. Wir haben dann

$$(u_3 - u_1)_{L_1} = 0, \quad (u_2^{(1)})_{\mathfrak{L}_1} = (u_1)_{\mathfrak{L}_1}, \quad (u_2^{(2)})_{\mathfrak{L}_2} = (u_1)_{\mathfrak{L}_2},$$
$$(u_3)_{\mathfrak{L}_1'} = (u_2^{(1)})_{\mathfrak{L}_1'}; \quad (u_3)_{\mathfrak{L}_2'} = (u_2^{(2)})_{\mathfrak{L}_2'}.$$

Sodann definieren wir $u_4^{(1)}$ und $u_4^{(2)}$ ganz analog wie $u_2^{(1)}$ und $u_2^{(2)}$; es gilt folglich:

$$(u_4^{(1)})_{\mathfrak{L}_1} = (u_3)_{\mathfrak{L}_1}, \quad (u_4^{(2)})_{\mathfrak{L}_2} = (u_3)_{\mathfrak{L}_2},$$
$$(u_4^{(1)} - u_2^{(1)})_{\mathfrak{L}_1} = (u_3 - u_1)_{\mathfrak{L}_1}, \quad (u_4^{(2)} - u_2^{(2)})_{\mathfrak{L}_2} = (u_3 - u_1)_{\mathfrak{L}_2}.$$

Ist das Potential $(u_3 - u_1)$ auf $\mathfrak{L}_1'$ und $\mathfrak{L}_2'$ kleiner oder gleich der endlichen Größe G, so gilt:

$$(u_3 - u_1)_{\mathfrak{L}_1'} \leq G, \quad (u_3 - u_1)_{\mathfrak{L}_2'} \leq G.$$

Nach bekannten Sätzen läßt sich alsdann eine Größe $q < 1$ bestimmen, so daß

$$(u_3 - u_1)_{\mathfrak{L}_1} \leq qG, \quad (u_3 - u_1)_{\mathfrak{L}_2} \leq qG,$$

es folgt dann auch

$$(u_4^{(1)} - u_2^{(1)})_{\mathfrak{L}_1'} \leq qG, \quad (u_4^{(2)} - u_2^{(2)})_{\mathfrak{L}_2'} \leq qG,$$

ferner

$$(u_5 - u_3)_{\mathfrak{L}_1} \leq q^2 G, \quad (u_5 - u_3)_{\mathfrak{L}_2} \leq q^2 G,$$

also allgemein

$$(u_{2n+1}-u_{2n-1})_{\mathfrak{L}_1} \leq q^n G, \quad (u_{2n+1}-u_{2n-1})_{\mathfrak{L}_2} \leq q^n G,$$
$$(u^{(1)}_{2n+2}-u^{(1)}_{2n})_{\mathfrak{L}'_1} \leq q^n G, \quad (u^{(2)}_{2n+2}-u^{(2)}_{2n})_{\mathfrak{L}'_2} \leq q^n G.$$

Diese Relationen genügen, um behaupten zu können, daß die Potentiale

$$u_{2n+1} = u_1 + (u_3-u_1) + (u_5-u_3) + \cdots$$
$$u^{(1)}_{2n} = u^{(1)}_2 + (u^{(1)}_4-u^{(1)}_2) + (u^{(1)}_6-u^{(1)}_4) + \cdots$$
$$u^{(2)}_{2n} = u^{(2)}_2 + (u^{(2)}_4-u^{(2)}_2) + (u^{(2)}_6-u^{(2)}_4) + \cdots$$

mit wachsendem n gleichmäßig gegen gewisse Grenzpotentiale U, U', U'' konvergieren, von denen U innerhalb T'_1 erklärt ist, und auf L_1 die Randwerte $\varrho_1^{-1}\cos\varphi$ annimmt, U' erklärt ist innerhalb des Kreises R_1, U'' innerhalb R_2.

Innerhalb der Gürtel $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}'_1)$ bezw. $(\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}'_2)$ stimmen die Potentiale U und U' bezw. U und U'' überein; definieren wir also das neue Potential u_1 auf folgende Weise:

$$u_1 = U \text{ innerhalb } T'_1; \quad u_1 = U' \text{ innerhalb } R_1;$$
$$u_1 = U'' \text{ innerhalb } R_2,$$

so ist u_1 ein für das ganze, ideal einfach zusammenhängende Gebiet T_1 regulär erklärtes Potential, welches auf L_1 die Randwerte $\varrho_1^{-1}\cos\varphi$ annimmt. Daß wir in der Figur 4, die wir zur Erläuterung einschoben, nur zwei Begrenzungskurven $\mathfrak{L}_i$ auftreten ließen, ist, wie man sieht, durchaus unwesentlich. Die Ueberlegungen lassen sich ganz ebenso für unser ursprüngliches Gebiet F_q und die Kreise $K_1 \ldots K_q$, $R_{11} \ldots R_{p2}$ durchführen; wir nehmen also an, daß in der Tat Ψ zugrunde lag, so daß $T_1 = \Psi - L_1$ ist. Wir haben dann durch das Vorangegangene das Resultat erhalten, daß innerhalb des ideal zusammenhängenden Gebietes T_1 ein überall reguläres Potential existiert, welches auf der Randkurve L_1 die Werte $\varrho_1^{-1}\cos\varphi$ annimmt.

Bezeichnen wir mit $u_1(\varrho_2, \varphi)$ die Randwerte von u_1 auf L_2, so können wir nun ein weiteres Potential u_2 nach folgender Vorschrift bestimmen:

u_2 ist regulär erklärt innerhalb T_2, d. h. innerhalb des Kreises L_2 und auf L_2 selbst ist:

$$(u_2)_{L_2} = u_1(\varrho_2, \varphi) - \varrho_2^{-1}\cos\varphi.$$

Die Werte, die u_2 auf L_1 annimmt, halten wir jetzt fest, und bestimmen wieder für T_1 ein Potential u_3 mit der Randbedingung:

$$(u_3)_{L_1} = u_2(\varrho_1, \varphi) + \varrho_1^{-1}\cos\varphi.$$

wie es oben ausführlich behandelt wurde. Analog folgt dann wieder ein Potential u_4, welches für das Innere von T_2 erklärt, und mit u_3 durch die Randbeziehung:

$$(u_4)_{L_2} = u_3(\varrho_2, \varphi) - \varrho_2^{-1} \cos \varphi$$

verknüpft ist; und so fort eine Folge von Potentialen $u_1, u_3, \ldots$, die innerhalb T_1 erklärt sind und $u_2, u_4, u_6, \ldots$, die innerhalb T_2 erklärt sind. Diese beiden Reihen konvergieren wieder gleichmäßig gegen zwei Grenzpotentiale:

$$u' = u_1 + (u_3 - u_1) + (u_5 - u_3) + \cdots$$
$$u'' = u_2 + (u_4 - u_2) + (u_6 - u_4) + \cdots,$$

von denen das erste für das Innere von T_1, das zweite für das Innere von T_2 definiert ist. Die Konvergenz kommt ganz analog den vorangegangenen Ueberlegungen zustande, da man ebenso nachweisen kann, daß

$$(u_3 - u_1) \leq qg, \quad (u_4 - u_2)_{L_1} \leq q^2 g, \quad (u_5 - u_3) \leqq q^2 g$$

wobei $q < 1$ und g der Maximalwert von u_2 auf L_2 ist. Setzt man also:

$$u = u' \qquad \text{für das Innere von } T_1,$$
$$u = u'' + \varrho \cos \varphi \text{ für das Innere von } T_2,$$

so ist u für das ganze Innere der ideal geschlossenen Fläche Ψ eindeutig, regulär erklärt, und wird im Punkte 0 unendlich wie $\varrho^{-1} \cos \varphi$. Nennen wir v das zu u konjugierte Potential, so vermittelt die analytische Funktion $Z = u + iv$ die konforme Abbildung von Ψ auf die Vollkugel.

In dem Falle, daß F von Anfang an schlichtartig ist, modifizieren sich die vorangegangenen Ueberlegungen nur insofern, als die Gebiete $\beta_{\nu i}$ und die Kreise $R_{\nu i}$ fortfallen. Der Bereich Φ wird also in dem Falle Ia auf die ganze Vollkugel abgebildet, im Falle Ib dagegen auf einen Teilbereich der Vollkugel, der von $2p$ zu Paaren analytisch aufeinander bezogenen geschlossenen Kurven begrenzt wird. Ein derartiger Bereich ist ein Fundamentalbereich vom Schottkytypus, und als solcher einer algebraischen Riemannschen Fläche äquivalent; dieselbe artet in die gewöhnliche schlichte Vollebene aus, wenn wir es mit dem Falle Ia zu tun haben. Hiermit haben wir das Theorem bewiesen, daß die gegebene Fläche F umkehrbar eindeutig und konform auf ein Gebiet bezogen werden kann, das Teilbereich einer geschlossenen algebraischen Riemannschen Fläche ist, da ja der Bereich Φ die ursprüngliche Fläche F ganz enthält.

Fall IIa und IIb.

Wir gehen jetzt zu dem Fall über, daß die vorliegende Fläche F von unendlich hoher Ordnung des Zusammenhangs ist, stellen aber jetzt die wesentliche Forderung, daß, falls F nicht von Anfang an schlichtartig ist, nur endlich viele Rückkehrschnitte nötig sein sollen, um sie schlichtartig zu machen; es sind dies die zwei früher erwähnten Fälle IIa und IIb. Um unter diesen Umständen nachzuweisen, daß F auf den Teilbereich einer geschlossenen Riemannschen Fläche abgebildet werden kann, müssen wir auf den Abbildungssatz für schlichte Bereiche unendlich hohen Zusammenhangs rekurrieren für den Herr Koebe in seiner dritten Mitteilung über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven einen Beweis erbringt.

Wir können nämlich unseren Bereich F, der also eine Riemannsche Fläche mit endlich oder unendlich vielen Blättern ist, durch endlich viele Rückkehrschnitte schlichtartig wird, aber von unendlich hoher Ordnung des Zusammenhangs ist, als die Grenzfläche auffassen, der eine Folge von Gebieten $F_1, F_2, F_3, \ldots$ zustreben. Diese Teilbereiche sind einfacher Art, nämlich endlichblättrig, endlich-vielfach zusammenhängend und analytisch begrenzt; ein jedes F umschließt ferner alle vorangehenden Gebiete F mit kleinerem Index:

$$F_1 < F_2 < F_3 < \cdots$$

Außerdem können wir noch annehmen, daß schon F_1 die p nicht zerstückenden Rückkehrschnitte zuläßt, falls wir den Fall IIb betrachten, was wir in der Tat tun wollen, da der Fall IIa wieder nur ein einfacher Spezialfall von IIb ist. Wir schneiden also die Teilbereiche längs dieser Rückkehrschnitte auf, und erweitern jedes F_ν über die Ufer der Rückkehrschnitte hinaus, damit auf diesen, als inneren Linien, die Abbildung regulär ist. Einen jeden erweiterten Teilbereich F'_ν (die erweiterten Bereiche F_ν wollen wir mit F'_ν bezeichnen) bilden wir nun auf ein schlichtes Gebiet ab. Daß dieses möglich, ist durch die vorangehenden Entwicklungen bewiesen; inhaltlich deckt sich dies auch mit der Aussage:

Zu jedem Bereiche F'_n existiert eine Funktion $\varphi_n(x)$ des komplexen Argumentes x, die im ganzen Inneren regulär, eindeutig erklärt ist, und in dem beliebig gewählten Punkte 0, der jedoch schon in F'_1 liegen mag, unendlich wird wie $\frac{1}{x-x_0}$, und die jeden ihrer Werte im ganzen Gebiet F'_n nur einmal, den Wert Null aber nirgends annimmt. Aus der Reihe dieser Funktionen $\varphi_n(x)$ können

wir nun eine gleichmäßig konvergente Folge herausgreifen, deren Grenzfunktion $\varphi(x)$ uns die gewünschte Abbildung von F' auf einen schlichten Bereich liefert; mit F' wollen wir dabei das Gebiet bezeichnen, das aus dem ursprünglichen Gebiet F durch Zerschneidung und Erweiterung längs der p Rückkehrschnitte entsteht.

Daß bei unseren Funktionen die Bedingungen erfüllt sind, welche notwendig, damit man eine konvergente Folge herausgreifen kann, läßt sich nun leicht zeigen. Umgibt man nämlich den Punkt 0 mit einem kleinen Kreise, der ein Stück λ_0 aus jedem F'_n herausschneidet, so wird dieses λ_0 von jedem $\varphi_n(x)$ auf ein schlichtes, einfach zusammenhängendes Gebiet L_0 abgebildet, das den unendlich fernen Punkt enthält. Wie nun der Hülfssatz 2 der oben zitierten Arbeit beweist, kann die Begrenzung von L_0 nicht beliebig weit vom Nullpunkte abrücken, sondern liegt ganz innerhalb eines Kreises vom Radius M, der um den Mittelpunkt der entsprechenden Abbildungsebene gelegt ist; M ist dabei unabhängig von dem Index i der Funktion φ_i. Das heißt aber, in dem Gebiete $(F'_i - \lambda_0)$ sind die Funktionen $\varphi_i(x)$ dem Betrage nach sämtlich kleiner als M. Wir haben also in den Gebieten:

$$(F'_1 - \lambda_0) < (F'_2 - \lambda_0) < \cdots$$

eine Folge eindeutiger regulärer Funktionen $\varphi_i(x)$, von denen $\varphi_i(x)$ für das Gebiet $(F'_i - \lambda_0)$ erklärt ist, und innerhalb desselben kleiner als eine von i unabhängige Größe M bleibt; folglich kann man nach dem dritten Hülfssatz obiger Arbeit eine gleichmäßig konvergente Folge herausgreifen. Die Grenzfunktion ist für das Grenzgebiet der $F' - \lambda_0$, das ist für $F' - \lambda_0$, erklärt. Die gleichmäßige Konvergenz bleibt nun auch auf dem Rande λ_0 selber bestehen und damit ergibt sich unmittelbar, daß $\varphi(x)$ für das ganze Gebiet F definiert ist und im Punkte 0 unendlich wird wie $\frac{1}{x - x_0}$.

Da ein jedes $\varphi_n(x)$ eine Abbildung von F'_n auf ein schlichtes Gebiet vermittelte und $\varphi(x)$ wegen des Poles in 0 sich auf keine Konstante reduzieren kann, so folgt, daß $\varphi(x)$ den Bereich F' auch auf ein schlichtes Gebiet abbildet. Dieses Gebiet enthält nun die längs der Rückkehrschnitte aufgeschnittene Fläche F ganz in seinem Inneren. Folglich wird auch dieser Bereich auf einen schlichten abgebildet; derselbe wird von $2p$ geschlossenen und zu Paaren auf einander analytisch bezogenen Kurven begrenzt, wenn nicht gerade F von Anfang an schlichtartig war; außerdem treten noch unendlich viele Grenzpunkte und Grenzlinien auf, da das konforme Abbild von F ebenso wie F selbst unendlich vielfach zusammenhängend sein muß.

Nun führen wir den gleichen Prozeß wie in den früher betrachteten Fällen Ia und Ib aus, nämlich wir überdecken sämtliche Grenzpunkte und Grenzlinien bis auf die $2p$ aufeinander bezogenen Kurven, was wir dieses Mal mit einem Schlage ausführen können. Dadurch gelangen wir zu einem Bereich Φ, der wiederum ein Fundamentalbereich vom Schottky-Typus ist, also auf eine geschlossene algebraische Fläche abgebildet werden kann, welche längs p Rückkehrschnitten aufgeschnitten erscheint. In dem Falle IIa erhalten wir die ganze Ebene inclusive des unendlich fernen Punktes als Bereich Φ.

Damit haben wir ganz allgemein die Tatsache bewiesen, daß eine beliebige nicht geschlossene Riemannsche Fläche, beliebig hoher Blätterzahl und beliebig hoher Ordnung des Zusammenhangs, die jedoch nur endlich viele nicht zerstückende Rückkehrschnitte zuläßt, auf einen Teilbereich einer geschlossenen Riemannschen Fläche abgebildet werden kann.

Der Beweis des an die Spitze des Paragraphen gestellten Satzes von der Existenz einer eindeutigen Funktion dieser Fläche, die nur in einem Punkte einen Pol hat, ist nun leicht zu Ende geführt.

Es liege also eine Riemannsche Fläche F der betrachteten Art vor und die Reihe von Abbildungen, die wir vorgenommen hatten, mag uns auf eine m-blättrige geschlossene Fläche G oder auf die Vollebene E geführt haben. Die Vollebene E tritt in den Fällen Ia und IIa auf. Auf ihr seien die Punkte markiert, die Grenzpunkten und Grenzlinien auf F entsprachen. Die Behauptung, daß unter diesen Umständen auf der ungeschlossenen Fläche F eine eindeutige Funktion existiert, die nur in einem Punkte einen Pol erster Ordnung hat, enthält nichts wesentlich Neues, da auch die geschlossenen Flächen des Geschlechtes $p = 0$ einpolige Funktionen besitzen, weil sie ja auf die schlichte Vollkugel abgebildet werden können. Wir erhalten allerdings eine größere Mannigfaltigkeit solcher Funktionen, die nur einen Pol haben, denn ist $r(x)$ irgend eine rationale Funktion des komplexen Argumentes, das wir uns über die Ebene ausgebreitet denken, und fallen alle Pole von $r(x)$ bis auf einen einzigen in solche markierten Grenzpunkte von F, so ist $r_F(x)$, d. h. die vermöge der ausgeführten Abbildungen auf F verpflanzte Funktion r, daselbst eine eindeutige Funktion, die nur eine einzige Unendlichkeitsstelle innerhalb F besitzt.

Wir können aber nun den Unterschied zwischen den geschlossenen und nicht geschlossenen Flächen in diesem Falle dadurch hervortreten lassen, daß wir weiter gehen und sagen:

Ist F eine beliebige nicht geschlossene Riemannsche Fläche, welche schlichtartig, so gibt es auf F eine eindeutige und überall im Inneren endliche Funktion. Diese erhalten wir, wenn wir eine rationale Funktion $r(x)$, deren sämtliche Pole aber jetzt in solche vorher markierten Grenzpunkte von F fallen, auf F zurückverpflanzen. Eine solche Funktion gibt es auf gewöhnlichen geschlossenen Flächen nicht.

Wir gehen jetzt zu dem allgemeineren Falle Ib und IIb über, bei welchem wir auf eine geschlossene algebraische Fläche G geführt wurden. Auch auf G denken wir uns diejenigen Stellen markiert, die Grenzpunkten und Grenzlinien auf F entsprachen. Auf G existieren eindeutige, n-wertige Funktionen, wobei n der Bedingung unterworfen ist

$$n \geq \left[\frac{p+3}{2}\right],$$

der Relation für die Minimalzahl der Blätter für das Geschlecht p[1]). Es handelt sich nun darum, eine eindeutige Funktion dieser algebraischen Fläche herzustellen, die einen Pol erster Ordnung in einem beliebig vorgeschriebenen Punkt dieser Fläche hat, und deren sämtliche übrigen Pole in die markierten Grenzpunkte fallen. Dies läuft auf die Lösung folgender Aufgabe hinaus: Man markiere auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche des Geschlechtes p, zwei Punkte z_0 und z_1, und bestimme eine eindeutige analytische Funktion dieser Fläche, die in z_0 einen Pol erster Ordnung, in z_1 einen Pol q^{ter} Ordnung und sonst keinen Pol auf der Fläche mehr hat. Die Zahl q ist vorerst beliebig und nur der Bedingung unterworfen, daß die Gesamtzahl der Pole der gesuchten Funktion nicht der obigen Relation für die Minimalzahl der Blätter widerspricht. Die Lösung dieser Aufgabe erfolgt nach einer oft benutzten Methode aus der Theorie der algebraischen Riemannschen Flächen.

Ist w_{12} das Integral dritter Gattung der betrachteten Fläche, das seine logarithmischen Unstetigkeitsstellen in den Punkten z_1 und dem beliebig gewählten Punkte z_2 hat, so definiert

$$Z_{z_1} = \frac{dw_{12}}{dz_1}$$

ein Integral zweiter Gattung derselben Fläche, das im Punkte z_1 seinen Pol erster Ordnung hat. Man bilde nun den Ausdruck

$$f = c_0 Z_{z_0} + c_1 \frac{dw_{12}}{dz_1} + c_2 \frac{d^2 w_{12}}{dz_1^2} + \cdots + c_q \frac{d^{(q)} w_{12}}{dz_1^q} + \sum_1^p \alpha_\nu j_\nu$$

---

1) Siehe F. Klein, Vorlesungen über Riemannsche Flächen, Bd. 1.

in welchem j_ν ein Integral erster Gattung der Fläche bedeutet und die c_i bezw. α_i vorerst beliebige Konstanten sind. Dieser Ausdruck hat im Punkte z_0 einen Pol erster Ordnung wegen des ersten Gliedes und in z_1 einen Pol q^{ter} Ordnung, und wächst um gewisse additive Perioden, wenn man einen Rückkehrschnitt durchläuft. Damit also dieser Ausdruck eine eindeutige Funktion der Fläche darstellt, hat man die $p+q+1$ Koeffizienten c_i und α_i so zu bestimmen, daß die Perioden für sämtliche $2p$ Rückkehrschnitte einer kanonischen Zerschneidung verschwinden. Diese Forderung liefert, wenn $q=p-1$ gewählt wird, gerade $2p$ lineare homogene Gleichungen für die $2p$ Unbekannten c_i, α_i, aus denen sich diese im allgemeinen berechnen lassen, wenn die Determinante des Systems gleich Null ist, andernfalls wählt man q um eins größer und hat es dann mit $2p$ Gleichungen für $2p+1$ Unbekannten zu tun, so daß es sicher eine Lösung gibt, bei der sogar eine der Unbekannten willkürlich bleibt. Der obige Ausdruck mit den so bestimmten Koeffizienten stellt dann eine eindeutige Funktion der algebraischen Fläche von der nach der gestellten Aufgabe gewünschten Art dar [1].

Hatten wir auf der betrachteten Riemannschen Fläche nicht nur einen Grenzpunkt z_1 sondern mehrere oder gar ganze Grenzlinien markiert, so können wir sämtliche Pole der Funktion bis auf einen über diese Grenzpunkte und Grenzlinien verteilen. Verpflanzen wir dann diese Funktion von der algebraischen Fläche auf unsere ursprüngliche, ungeschlossene Riemannsche Fläche, in dem wir alle Abbildungen, die wir oben ausführten, in umgekehrter Reihenfolge wiederholen, so gilt:

Wir erhalten in f_F (der Index F soll andeuten, daß wir die Funktion als Funktion des Ortes auf F betrachten) eine eindeutige, für alle Innenpunkte von F mit dem Charakter algebraischer Funktionen definierte Funktion, die einzig und allein im Punkte 0 des Bereiches einen Pol erster Ordnung hat.

Der eben bewiesene Satz zeigt, daß man auf ungeschlossenen Flächen einen gewissermaßen größeren Reichtum an Funktionen hat als auf algebraischen. Man hat die Möglichkeit, sich einpolige, zweipolige, beliebig vielpolige Funktionen herzustellen, sogar solche, die für alle Innenpunkte endliche Werte annehmen. Wie diese Tatsache fruchtbringend verwandt werden kann, soll in dem folgenden Paragraphen gezeigt werden.

---

1) Für den Beweis unseres Hauptsatzes kommt es übrigens auf die Einpoligkeit nicht an. Der Pol in z_0 kann von beliebiger Ordnung sein.

§ 2.

Beweis des Satzes I.

Wir beweisen jetzt den Satz I mit Hülfe der Resultate des vorigen Paragraphen in folgender Gestalt:

Ist F eine beliebige, nicht geschlossene Riemannsche Fläche von endlich oder unendlich hoher Blätterzahl, welche nur endlich-viele nicht zerstückende Rückkehrschnitte zuläßt, die aber sonst von endlich oder unendlich hoher Ordnung des Zusammenhangs sein mag, so kann F stets aufgefaßt werden als Existenzgebiet einer analytischen Funktion, die für alle Innenpunkte des Gebietes mit dem Charakter einer algebraischen Funktion definiert ist.

Wie in der Einleitung erwähnt, wird der Gedankengang des Beweises der sein, daß wir aus gewissen Elementen eine Funktion konstruieren, deren Pole sich nur gegen solche Punkte häufen, die Grenzpunkte von F sind; eine solche Funktion hat dann F zum Existenzbereich.

Zu diesem Zwecke greifen wir aus F eine abzählbar unendliche Punktmenge A_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ heraus, deren Häufungsmenge einzig und allein aus den Grenzpunkten und Begrenzungslinien von F besteht. Jedem Punkte A_ν ordnen wir nun eine einpolige Funktion f_ν von F zu, die in A_ν ihren Pol erster Ordnung hat. Bilden wir dann den Ausdruck

$$\Phi = \Sigma c_\nu f_\nu(x)$$

und bestimmen die Koeffizienten c_ν so, daß diese Reihe konvergiert, so stellt $\Phi(x)$ eine Funktion dar, die für alle Punkte von F regulären Charakter hat, bis auf die Punkte der Menge A, in denen sie von der ersten Ordnung unendlich wird. Φ ist also eine analytische Funktion, die F zum Existenzgebiet hat.

Es fehlt nur noch, um den Beweis vollständig zu machen, der Nachweis, daß man in der Tat die Koeffizienten c_ν so bestimmen kann, daß der Ansatz $\Sigma c_\nu f_\nu$ konvergiert[1]). Unter Konvergenz verstehen wir hierbei Folgendes:

Betrachten wir irgend ein Gebiet, das ganz innerhalb F liegt und lassen wir die Glieder der Reihe $\Sigma c_\nu f_\nu$ fort, deren Pol in dieses Gebiet fallen — es können nur endlich viele solche Glieder

---

1) Vergl. Mittag-Leffler, Acta math., Bd. 4, 1884.

auftreten, da sich die Pole sonst schon nach einem Innenpunkte von F zu häufen müßten — so soll die verbleibende Reihe in diesem Gebiete eine analytische Funktion darstellen, die dem absoluten Betrage nach für das ganze Gebiet unterhalb einer angebbaren, endlichen Grenze bleibt. Und zwar soll das gelten für jedes mögliche Gebiet, das ganz innerhalb von F liegt. Wir gehen folgendermaßen zu Wege: Wir schöpfen F durch eine Folge von Gebieten $F_1, F_2, F_3, \ldots$ aus, die ganz innerhalb F liegen, sich gegenseitig umfassen, sodaß sich F_ν stets ganz innerhalb $F_{\nu+1}$ befindet, und die zu der Punktmenge der A_ν in der Beziehung stehen, daß F_ν die Punkte $A_1 \ldots A_{\nu-1}$ in seinem Inneren enthält, dagegen den Punkt A_ν und alle weiteren ausschließt und auch keinen auf seiner Begrenzung liegen hat. Diese Bedingung kann man immer erfüllen, da ja die Punkte A_ν sich nirgends innerhalb F häufen. Nach dieser Bestimmungsweise enthält also F_1 keinen der Punkte A_ν.

Nun wählen wir irgend eine absolut konvergente Zahlfolge $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ aus, für welche $\Sigma |Z_\nu| = M$ endlich ist, und definieren den Koeffizienten c_1 durch die Relation: $c_1 = \frac{Z_1}{m_1}$, wobei m_1 den Maximalwert von f_1 innerhalb F_1 bedeutet. Analog bestimmen wir: $c_2 = \frac{Z_2}{m_2}$, wo m_2 der Maximalwert von f_2 in F_2 ist, und allgemein $c_\nu = \frac{Z_\nu}{m_\nu}$. Durch diese Bestimmungsweise erreichen wir, daß die Reihe $\Phi = \Sigma c_\nu f_\nu$ für jedes ganz innerhalb F gelegene Gebiet dem Betrage nach unterhalb M bleibt, wenn man die endlich vielen Glieder fortläßt, die in dem Gebiet ihren Pol haben. Damit ist der Beweis des Satzes I in der vorangestellten Gestalt erledigt. Die gegebene Riemannsche Fläche F kann stets als Existenzgebiet einer analytischen Funktion betrachtet werden, die innerhalb F eindeutig und mit dem Charakter algebraischer Funktionen erklärt sind.

Kapitel II.

Die Resultate des vorangegangenen Kapitels leiden unter der Einschränkung, daß die betrachteten Riemannschen Flächen schon durch endlich viele Rückkehrschnitte schlichtartig werden sollten. Dies liegt, wie gesagt, daran, daß es mir bis jetzt nicht gelungen ist, den Satz von der Existenz einpoliger Funktionen für beliebige Flächen zu beweisen, obwohl er aller Wahrscheinlichkeit nach richtig ist. Wollen wir also den Satz I in aller Allgemeinheit

beweisen, so müssen wir einen neuen Weg einschlagen, und dieser bietet sich in der Tat, wenn man das Uniformisierungstheorem beliebiger analytischer Kurven explizite voraussetzt und den Schauplatz der Betrachtungen von der Fläche F in einen Fundamentalbereich verlegt, der durch konforme Abbildung, aus der aufgeschnittenen Fläche F hervorgeht. Eindeutige analytische Funktionen von F sind dann eindeutige automorphe Funktionen des Fundamentalbereiches [1]). Die Fragestellung des Satzes I, für die Fläche F aufgestellt, wird zu einer entsprechenden Fragestellung für den Fundamentalbereich.

Zu dieser Fragestellung selbst werde ich aber erst im zweiten Paragraphen dieses Kapitels treten, da ich vorher noch auf das Uniformisierungstheorem beliebiger analytischer Kurven eingehen muß; denn in den Entwicklungen des Herrn Koebe in seiner oben erwähnten zweiten Mitteilung fehlt noch der Existenzbeweis für die einfach zusammenhängende Ueberlagerungsfläche, um deren Abbildung auf das Innere des Einheitskreises es sich handelt. Ich werde also erst einen Existenzbeweis für die einfach zusammenhängende Ueberlagerungsfläche einer ganz allgemeinen Riemannschen Fläche F bringen, daran anschließend kurz die Möglichkeit ihrer konformen Abbildung auf das Innere des Einheitskreises besprechen, um dann im zweiten Paragraphen auf den Satz I zurück zu kommen.

§ 1.

Das Uniformisierungstheorem beliebiger analytischer Kurven sagt Folgendes aus: Ist $y(x)$ eine analytische Funktion des komplexen Argumentes x, so existiert eine analytische Funktion $t(x) = t(xy)$, die dadurch ausgezeichnet ist, daß y und x aufgefaßt als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen t eindeutige Funktionen derselben sind. Durch diese Eigenschaft ist aber die Hülfsvariable t keineswegs eindeutig bestimmt, man unterscheidet vielmehr, je nachdem das Wertegebiet, für das t definiert ist, einfach oder mehrfach zusammenhängend ist oder in letzterem Falle speziell aus zwei einfach zusammenhängenden, symmetrischen Hälften besteht, verschiedene Typen von Uniformisierungstranszendenten t, die sich auch durch ihre uniformisierende Kraft unterscheiden. Denn was $t(xy)$ für die analytische Funktion $y(x)$ leistet, leistet sie auch zugleich für eine ganze Klasse weiterer Funktionen, und zwar in weiterem oder geringerem Umfange.

1) R. Fricke u. F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. I.

Da nun eine jede analytische Funktion $t(x)$ eine konforme Abbildung zwischen dem über der komplexen x-Ebene ausgebreiteten Gebiet, für das $t(x)$ als Funktion des Ortes erklärt ist und einer entsprechend über der komplexen t-Ebene ausgebreiteten Riemannschen Fläche vermittelt, so kann man fragen; was für eine spezielle Abbildung der Riemannschen Fläche, die die Verzweigung der Funktion $y(x)$ darstellt, vermittelt die uniformisierende Variable $t(x) = t(xy)$? Es ergibt sich, daß $t(x)$ die aufgeschnittene Riemannsche Fläche F auf einen einfach zusammenhängenden Bereich ein sogenanntes Grenzkreispolygon abbildet, wenn das Wertegebiet von t durch das Innere des Einheitskreises dargestellt wird. Das ganze Innere des Einheitskreises selbst ist dabei konform auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet bezogen, das über F ausgebreitet, relativ zu F unverzweigt ist und überall den topologischen Charakter von F trägt. Diese Fläche heißt die einfach zusammenhängende Ueberlagerungsfläche von F. Die Funktion $t(x)$ wird in diesem Falle die uniformisierende Transzendente vom Grenzkreistypus genannt, weil der Einheitskreis die natürliche Grenze für die Funktionen x und y, aufgefaßt als Funktionen von t, darstellt.

Will man umgekehrt die Existenz einer solchen Funktion nachweisen, so kann man in der Art vorgehen, daß man erst die Existenz der einfach zusammenhängenden Ueberlagerungsfläche beweist. Dies ist frei von dem betreffenden Uniformisierungsproblem, allein durch Ueberlegungen der analysis situs möglich, weil, wie Herr Koebe bewiesen hat[1]), die einfache zusammenhängende Ueberlagerungsfläche durch ihre Eigenschaft, eine über die ganze Fläche F ausgebreitete, relativ zu F unverzweigte, einfach zusammenhängende Fläche zu sein, die überall den topologischen Charakter von F trägt, vollständig charakterisiert ist. Alsdann beweist man die Möglichkeit, diese Ueberlagerungsfläche auf das Innere des Einheitskreises konform abzubilden. Diese Methode, die Existenz der uniformisierenden Variable vom Grenzkreistypus nachzuweisen ist die sogenannte Methode der Ueberlagerungsfläche, die wir jetzt kurz besprechen wollen. Ich werde erst einen ausführlichen Nachweis für die Existenz der einfach zusammenhängenden Ueberlagerungsfläche bringen, sodann skizziert den Abbildungsbeweis, wie er in der oben erwähnten „zweiten Mitteilung“ durchgeführt ist.

1) Math. Annalen, Bd. 67, S. 191.

a. Herstellung der einfach zusammenhängenden Ueberlagerungsfläche [1]).

Wir legen unserer Betrachtung eine Riemannschen Fläche allgemeinster Art zugrunde. F ist eine endlich oder unendlich vielblättrige Fläche, die endlich oder unendlich vielfach zusammenhängend ist und beliebig viele Grenzpunkte oder ganze Begrenzungslinien enthält. Verzweigungspunkte endlicher Ordnung gelten als Innenpunkte des Bereiches, Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung, sowie Häufungspunkte von Verzweigungspunkten überhaupt, als Grenzpunkte. Bei der Herstellung der einfach zusammenhängenden Ueberlagerungsfläche wird uns der Gesichtspunkt leitend sein, daß, wenn es uns überhaupt gelingt, eine Fläche ihrer Art herzustellen, diese dann die Gewünschte ist, denn die einfach zusammenhängende Ueberlagerungsfläche ist als solche eindeutig bestimmt. Als bekannt setze ich voraus, wie man im Falle einer Riemannschen Fläche von endlicher Ordnung des Zusammenhangs die Ueberlagerungsfläche herstellt; man vergleiche die entsprechenden Entwickelungen in der Arbeit des Herrn Koebe „Ueber die Uniformisierung der algebraischen Kurven I", Math. Annalen, Bd. 67.

Unsere beliebige Fläche F können wir uns als Grenze einer Folge von Flächen F_ν vorstellen, von denen eine jede endlich viele Blätter und Verzweigungspunkte hat und eine wohl bestimmte Begrenzung besitzt,

$$\lim_{\nu=\infty} F_\nu = F.$$

Von der Begrenzung der Teilgebiete F_ν setzen wir nur voraus, daß keine solchen Begrenzungslinien auftreten, über die hinweg die Fläche abgeschlossen werden kann. Dies hat folgenden Grund: Tritt in einem Teilgebiete F_n eine Begrenzungslinie L_n auf, welche ein Gebiet von F abtrennt, das lauter Innenpunkte von F und keinen Grenzpunkt enthält, so wird in einem der folgenden Gebiete F_{n+m} diese Begrenzungslinie fortfallen müssen, da ja die Gebiete F_ν die Fläche F ganz ausschöpfen sollen; sich allmählig zusammenziehen, kann nämlich L_n nicht, da es sonst auf eine Grenzlinie, oder einen Grenzpunkt von F zusammenschrumpfen müßte, was nach Voraussetzung unmöglich.

Solche Begrenzungslinien sind also unwesentlich und deshalb störend, weil sie verursachen können, daß die Ordnung des Zusammenhangs bei einem Gebiete F_ν größer ist als in einem umfassenderen Gebiete $F_{\nu+\mu}$, was wir im Folgenden durchaus vermeiden wollen.

---

1) Ich stütze mich in diesem Abschnitte wesentlich auf mündliche Mitteilungen von Herrn Koebe.

Der erste Schritt bei dem Aufbau der einfach zusammenhängenden Ueberlagerungsfläche wird der sein, das wir aus F durch Zerschneidung längs Querschnitten und Rückkehrschnitten eine einfach zusammenhängende Fläche $[F]$ herstellen; da aber dazu im allgemeinen unendlich viele Schnitte nötig sind, so müssen wir einen Weg angeben, der den Fortschritt der Zerschneidung verfolgen läßt.

Bezeichnet q_n die Ordnung des Zusammenhangs von F_n, so sind nach bekannten Prinzipien der analysis situs $q_n - 1$ von einander getrennt verlaufende Querschnitte notwendig, um F_n in die einfach zusammenhängende Fläche $[F]$ zu verwandeln. Da F_0 endlichblättrig und endlich vielfach zusammenhängend ist, so ist $q_0 - 1$ natürlich endlich und die Zerschneidung von F_0 bietet keine Schwierigkeiten. Gehen wir jetzt zu F_1 über, so führen wir hier die Zerschneidung so aus, daß das, was in F_0 schon aufgeschnitten war auch in F_1 aufgeschnitten bleibt. Symbolisch kann man sich diese Vorschrift nach Figur 5 versinnbildlichen.

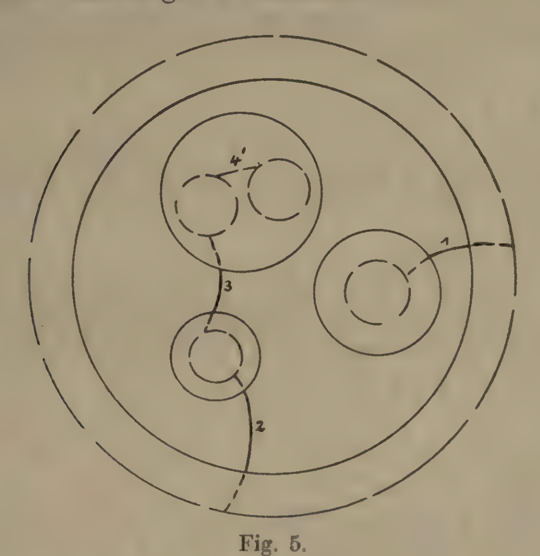


Fig. 5.

Der Bereich F_0 ist durch die ausgezogene Begrenzungslinie markiert und vierfach zusammenhängend, F_1 durch die punktierten Linien und fünffach zusammenhängend. Die Querschnitte 1, 2, 3, verwandeln F_0 in einen einfach zusammenhängenden Bereich. Bei der Zerschneidung von F_1 werden die Querschnitte 1, 2, 3, nur über ihre Endpunkte hinweg bis zu den Begrenzungslinien von F_1 verlängert, außerdem tritt aber als neuer Querschnitt 4′ hinzu. Nach dieser Zerschneidung ist F_1 einfach zusammenhängend.

Wie im allgemeinen Falle diese Methode gemeint ist, übersieht man nach diesem Beispiele leicht. Außer den Querschnitten läßt aber im allgemeinen der Bereich F auch nicht zerstückende Rückkehrschnitte zu. In einen jeden solchen Rückkehrschnitt mündet aber noch ein Querschnitt, da der aufgeschnittene Bereich sonst nicht einfach zusammenhängend würde. In Figur 6 mag $\mathfrak{L}$ einen einzelnen solchen Rückkehrschnitt darstellen und Q den Querschnitt, der ihn mit der Grenzlinie B verbindet; man kann sich dann auch die Zerschneidung längs $\mathfrak{L}$ und Q als die Ausartung einer andersartigen vorstellen, die in der Figur 6 durch $\mathfrak{L}'$ angedeutet sein soll, und die von einem Punkte der Begrenzung B auslaufend und den Querschnitt $\mathfrak{L}$ verfolgend, zu einem anderen Punkte derselben Begrenzung zurückkehrt.

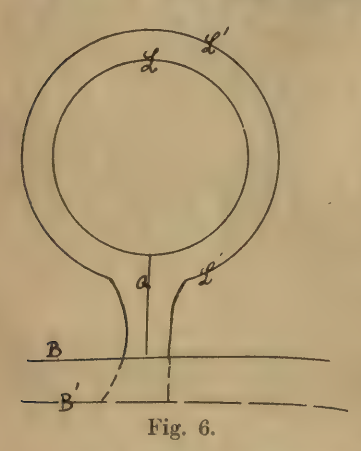


Fig. 6.

Bei einer dementsprechenden Zerschneidung von F_0 und F_1 bleibt wieder alles aufgeschnitten, nur erweitert man bei F_1 den Schnitt $\mathfrak{L}'$ über die Endpunkte hinaus bis zur Begrenzungslinie B' von F_1

Nach den vorangehenden Vorschriften zerschneiden wir also $F_0, F_1, F_2, \ldots$ und erhalten dafür eine Folge einfach zusammenhängender Bereiche $[F_0], [F_1], \ldots$, die sich gegenseitig umschließen, so daß

$$[F_0] < [F_1] < [F_2] < \cdots,$$

wir werden dadurch zu der Vorstellung einer Grenzfläche:

$$[F] = \lim_{n=\infty} [F_n]$$

geführt, die auch einfach zusammenhängend ist, und aus unserer ursprünglichen Fläche F durch Zerschneidung längs im allgemeinen unendlich vieler Querschnitte und Rückkehrschnitte entsteht. Nun heften wir an jede Querschnittseite von $[F_0]$ (auch die Schnitte vom Typus $\mathfrak{L}'$ wollen wir Querschnitte nennen) je ein Exemplar $[F_0]$ an, ganz analog wie es in der oben erwähnten Arbeit des Herrn Koebe, Math. Annalen, Bd. 67 geschieht und erhalten eine neue Fläche, die wir mit $[F_0^{(1)}]$ bezeichnen wollen, und für welche sicher die Relation erfüllt ist

$$[F_0] < [F_0^{(1)}].$$

Das gleiche führen wir nun auch für $[F_1]$ aus, indem wir an jede Querschnittseite ein neues Exemplar $[F_1]$ anheften. Die entspringende Fläche $[F_1^{(1)}]$ enthält erstens $[F_1]$ in ihrem Inneren, d. h.

$$[F_1] < [F_1^{(1)}],$$

außerdem gilt aber auch

$$[F_0^{(1)}] < [F_1^{(1)}],$$

wie man sofort aus unserer Methode die Flächen F_ν aufzuschneiden erkennt; denn da in $[F_1]$ das aufgeschnitten bleibt, was es schon in $[F_0]$ war, und nur neue Schnitte noch dadurch hinzukommen, daß die Ordnung des Zusammenhangs der Flächen F_ν mit wachsendem Index ν wächst, so liegt, da $[F_0]$ ganz innerhalb $[F_1]$, auch $[F_0^{(1)}]$ ganz innerhalb $[F_1^{(1)}]$. Mit jedem der Teilgebiete $[F_\nu]$ führen wir diesen Prozeß des einmaligen Anheftens kongruenter Exemplare aus, und erhalten dadurch eine Folge von Gebieten:

$$[F_0^{(1)}] < [F_1^{(1)}] < [F_2^{(1)}] < \cdots$$

Im Limes werden wir auf eine einfach zusammenhängende Fläche $[F^{(1)}]$ geführt, die aus $[F]$ nach der Art ihrer Entstehung auch durch den Prozeß des Anheftens von kongruenten Exemplaren $[F]$ an den Querschnittseiten entstanden ist, so daß:

$$[F] < [F^{(1)}].$$

Auf diese Weise fahren wir fort. An jede Querschnittseite von $[F_0^{(1)}]$ heften wir wieder ein neues Exemplar $[F_0]$ an, und analog an jedes $[F_\nu^{(1)}]$ neue Exemplare $[F_\nu]$. Bezeichnen wir mit $[F_\nu^{(2)}]$ die nach diesem Schritt entstehende Fläche, so gilt wieder:

$$[F_0^{(2)}] < [F_1^{(2)}] < [F_2^{(2)}] < \cdots$$

und die Grenzfläche $[F^{(2)}]$ steht zu $[F]$ und $[F^{(1)}]$ in der gleichen Beziehung wie eines der $[F_\nu^{(2)}]$ zu $[F_\nu]$ und $[F_\nu^{(1)}]$. Was wir hier für den Indexwert 2 abgeleitet haben, ergibt sich natürlich auch ebenso für jeden beliebigen Wert n desselben; wir werden für jeden Wert von n auf die Vorstellung der Grenzfläche

$$[F^{(n)}] = \lim_{\nu=\infty} [F_\nu^{(n)}]$$

geführt.

Fahren wir mit dem Anheften bei jedem der Gebiete $[F_\nu]$ bis in das Unbegrenzte fort, so erhalten wir für jeden bestimmten aber festen Wert ν eine Fläche:

$$\Phi_\nu = \lim_{n=\infty} [F_\nu^{(n)}],$$

die die einfach zusammenhängende Ueberlagerungsfläche von F_ν ist. Die vorangegangenen Ueberlegungen zeigen aber, daß man auch bei $F = \lim_{\nu=\infty} F_\nu$ Schritt für Schritt den Aufbau der Fläche verfolgen kann, da wir ja die Existenz der Flächen $[F^{(n)}]$, die man sich aus $[F]$ durch n-maliges Anheften kongruenter Exemplare entstanden denken muß, nachgewiesen haben; die Grenzfläche, der die Gebiete

$$[F] < [F^{(1)}] < [F^{(2)}] < [F^{(3)}] < \cdots$$

zustreben, wollen wir mit

$$\Phi = \lim_{\nu=\infty} [F^{(\nu)}]$$

bezeichnen. Sie ist eine ungeschlossene über F ausgebreitete und relativ zu F unverzweigte, einfach zusammenhängende Fläche, die an jeder Stelle den topologischen Charakter von F trägt. Nun folgt ganz analog, wie es in der oben zitierten Arbeit (Math. Annalen, Bd. 67, S. 191) geschieht, daß zwei Flächen dieser Beschaffenheit identisch sind; andererseits aber charakterisiert sich diese einfach zusammenhängende Fläche durch ihre Beschaffenheit vom Standpunkte der analysis situs vollständig als Existenzbereich einer uniformisierenden Variablen unseres Uniformisierungsproblems. Also ist die Fläche Φ, die wir erhielten, die gesuchte einfach zusammenhängende Ueberlagerungsfläche von F.

b. Der Beweis des allgemeinen Abbildungssatzes [1]).

Der zweite und schwierigere Teil des Beweises des Uniformisierungstheorems besteht in dem Nachweis, daß man diese einfach zusammenhängende Ueberlagerungsfläche konform auf das Innere des Einheitskreises abbilden kann (Koebe, 2. Mitteilg.). Der Nachweis dieser Tatsache hängt mit folgendem allgemeinen Abbildungssatze zusammen:

Es sei B irgend ein nach Art einer Riemannschen Fläche über die z-Ebene ausgebreiteter Bereich, welcher endlich oder unendlich vielblättrig sein kann. Der Bereich B kann in seinem Inneren endlich oder unendlich viele Windungspunkte haben; die Ordnungszahl jedes einzelnen inneren Windungspunktes ist jedoch endlich. Die Anzahl der Blätter und Windungspunktes ist abzählbar. Hat der Bereich B in irgend einem seiner Blätter Grenzpunkte oder

1) Dieser Beweis kann nach verschiedenen Methoden geführt werden, man vergl. Poincaré, Sur l'uniformisation des fonctions analytiques, Acta math., Bd. 32, 1907, sowie Koebe, Math. Annalen, Bd. 67 und Hilbert, „Zur Theorie der konformen Abbildung", Göttinger Nachrichten 1909.

ganze Begrenzungslinien, so werden dieselben zum Bereiche selbst nicht mitgerechnet.

Unter den genannten völlig allgemeinen Voraussetzungen über den Bereich B gilt die Behauptung:

Es ist möglich den einfach zusammenhängenden Bereich B in eindeutig umkehrbarer Weise konform auf einen die Kugel schlicht überdeckenden Bereich abzubilden. Derselbe wird entweder von der ganzen Vollkugel oder von der ganzen Kugel mit Ausnahme eines Punktes oder von einer Kugelkalotte gebildet, deren Begrenzung nicht als zur Kalotte gehörig betrachtet wird.

Den Fall, daß B auf die Vollkugel abgebildet wird, lassen wir bei Seite, er betrifft nur geschlossene Riemannsche Flächen des Geschlechtes $p = 0$ und wurde von H. A. Schwarz[1]) erledigt. Die Hauptschlüsse des Beweises zu obigem Satze haben wir schon im ersten Paragraphen des ersten Kapitels gebracht, als wir die Abbildung eines zweifach zusammenhängenden Bereiches auf einen schlichten von zwei konzentrischen Kreisen begrenzten Kreisring betrachteten. Man geht nämlich erst von B zu einem zweifach zusammenhängenden Bereiche B_1 über, indem man in geeigneter Weise einen Kreis K aus B herausschneidet. Der Vorteil, den diese scheinbare Erschwerung der Frage durch den Uebergang zu einem Bereiche von höherer Ordnung des Zusammenhangs mit sich bringt, beruht darin, daß wir in der Kreisperipherie K eine wohldefinierte Begrenzungslinie von B_1 vor uns haben, auf der wir uns in den folgenden Ueberlegungen stützen können.

Der Bereich B_1 wird nun erst auf einen Kreisring abgebildet, der allerdings auch in einen Vollkreis exklusive des Nullpunktes ausarten kann. Diesen speziellen Fall wollen wir vor der Hand kurz erledigen, da er uns späterhin nicht interessieren wird; er führt nämlich zu der Abbildung von B auf die punktierte Vollkugel, oder anders gewandt zu der Abbildung von B auf die Ebene exklusive des unendlich fernen Punktes.

Ist B die einfach zusammenhängende Ueberlagerungsfläche einer beliebig vorgegebenen Riemannschen Fläche F, so haben wir es mit einem Uniformisierungsproblem zu tun, bei welchem die uniformisierende Variable t die ganze Ebene exklusive des unendlich fernen Punktes zum Wertegebiet hat. Die Fundamentalbereiche der diesem Problem entsprechenden linearen diskontinuierlichen Gruppe häufen sich nur nach dem unendlich fernen Punkte,

1) H. A. Schwarz, „Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta(u) = 0$". Monatsberichte der Berliner Akademie 1870, abgedruckt in den Ges. Abhandlungen, Bd. II.

und zwei Zweige der uniformisierenden Variabeln $t(x)$, die auf F unendlich vieldeutig ist, hängen durch eine Transformation der Gestalt:

$$t_2 = at_1 + b$$

zusammen, wobei jedoch, wie sich sofort ergibt, $a = 1$, oder eine Einheitswurzel sein muß, da die Gruppe eigentlich diskontinuierlich ist[1].

Da keine elliptischen Substitutionen auftreten können, weil $t(xy)$ zu F relativ unverzweigt ist, so erhält man, wie bekannt, als Fundamentalbereich entweder einen Parallelstreifen oder ein Parallelogramm, den Substitutionen:

$$t_2 = t_1 + 2mw, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

oder

$$t_2 + 2mw_1 + 2m'w_2, \quad \left.\begin{matrix} m \\ m' \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, \ldots$$

entsprechend. Im ersten Falle vermittelt dann die Funktion $X = e^{\frac{t\pi i}{w}}$ eine Abbildung des Fundamentalbereiches auf die zweifach punktierte Vollkugel ($p = 1$), im zweiten Falle die elliptische Funktion $\wp(t)$ eine solche auf eine zweiblättrige Riemannsche Fläche des Geschlechtes $p = 1$. Diesen beiden Gebieten ist nun unsere ursprüngliche Riemannsche Fläche durchaus äquivalent, wir finden demgemäß: der spezielle Fall, daß die einfach zusammenhängende Ueberlagerungsfläche auf die Ebene exklusive des unendlich fernen Punktes abgebildet wird, tritt nur dann ein, wenn die zugrunde liegende Riemannsche Fläche vom Geschlechte $p = 1$ ist. Diese Flächen fallen aber schon in die Klasse derer, die wir im ersten Kapitel behandeln konnten. Wir brauchen deshalb auf sie nicht wieder besonders einzugehen.

Unser zweifach zusammenhängender Bereich B_1 wird also, um auf unsere früheren Ueberlegungen zurückzukommen, auf einen Kreisring abgebildet, dessen äußerer Begrenzungskreis K_a dem Kreise K_0 auf B_1 entspricht. Die Abbildung des ursprünglich gegebenen einfach zusammenhängenden Bereiches $B = (B_1 + K_0)$ auf das Innere des Einheitskreises erreichen wir nun wieder durch Anwendung der Methode der gürtelförmigen Verschmelzung.

Wir ziehen in dem Kreisringe (K_a, K_i) einen konzentrischen Kreis K, der auf B_1 vermöge der konformen Beziehung beider

---

1) Siehe Koebe, Ueber die Uniformisierung der algebraischen Kurven I, Math. Annalen, Bd. 67, S. 164.

Bereiche eine geschlossene Linie $\mathfrak{L}$ entsprechen mag. Den Ring zwischen K und K_a nennen wir den Gürtel G, G' den Gürtel zwischen K_0 und $\mathfrak{L}$. G und G' sind eindeutig auf einander abgebildet. Die Methode der gürtelförmigen Verschmelzung ermöglicht uns nun die Existenz zweier Potentiale u' und u'' nachzuweisen, die folgender Art sind:

u' ist innerhalb des Ringes zwischen K_a und K_i eindeutig und regulär, es verschwindet auf K_i.

u'' ist eindeutig in $K_0 + G'$, und wird in einem Punkte 0 unendlich wie $\lg r$, während es innerhalb des Gürtels G' die gleichen Werte annimmt wie u' in G.

Dieser Nachweis wird folgendermaßen geführt: Den einfach zusammenhängenden Bereich $K_0 + G'$ bilden wir auf das Innere des Einheitskreises konform ab; der geschlossenen Linie $\mathfrak{L}$ entspricht dann die Peripherie des Einheitskreises, dem Kreise K_0 eine geschlossene Linie, die den Nullpunkt umfaßt, wenn wir den Mittelpunkt von K_0 und den des Einheitskreises sich entsprechen lassen. Diese Kurve möge durch die Beziehung $r = U(\varphi)$ bestimmt sein. Wir betrachten nun folgende Bereiche:

1) den Ring zwischen K_a und K_i, den wir mit T_1 bezeichnen wollen,

2) den einfach zusammenhängenden Bereich $K_0 + G' : T_2$.

Für diese Gebiete definieren wir nun abwechselnd eine Folge von positiven Potentialen, die folgenden Randbedingungen genügen:

u_1 ist innerhalb T_1 regulär und eindeutig, längs K_i gleich Null, und längs K_a gleich $\lg U(\varphi)$,

u_2 ist für T_2 regulär definiert, längs $\mathfrak{L} \;= (u_1)_K$,

u_3 „ „ T_1 „ „ , „ $K_a = \lg U(\varphi) + (u_2)_{K_0}$,

„ $K_i = 0$,

u_4 „ „ T_2 „ „ , „ $\mathfrak{L} \;= (u_3)_K$.

Diese Vorschriften heissen: $(u_1)_K$ sind die Randwerte, die u_1 auf K beziehungsweise auf L annimmt, wenn ich dieselben von K auf L vermöge der zwischen ihnen bestehenden konformen Beziehung übertrage. Analog bedeutet $(u_2)_{K_a}$ die Uebertragung der Randwerte von u_2 von K_0 auf K_a vermöge der konformen Beziehung zwischen diesen Kurven. Ist $|U(\varphi)| \leq G$, wobei G eine endliche Zahl bedeutet, so gilt nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie

$$(u_1)_K < qG, \quad q < 1, \text{ also auch } |u_2| < qG.$$

Da u_3 auf K_a gleich $\lg U(\varphi) + (u_2)_{K_a}$ und $u_1 = \lg U(\varphi)$ und beide

gleich Null auf K_i sind, so folgt:

$$(u_3 - u_1) < qG \text{ innerhalb } T_1, \text{ auf } K: < q^2 G.$$

u_4 stimmt wieder längs K bezw. $\mathfrak{L}$ mit u_3 überein, daraus folgt $(u_4 - u_2) \leqq q^2 G$ innerhalb T_2, da ja $u_4 - u_2 = u_3 - u_1$ längs K ist. Wie nun weiter die Potentiale ungeraden Indexes für T_1 und die geraden Indexe für T_2 zu definieren sind, ist klar, ferner ist auch ersichtlich, daß die beiden Reihen:

$$u' = u_1 + (u_3 - u_1) + (u_5 - u_3) + \cdots,$$
$$u'' = u_2 + (u_4 - u_2) + (u_6 - u_4) + \cdots$$

gleichmäßig konvergieren. Das Grenzpotential u' ist innerhalb T_1, das ist im Inneren des Ringes zwischen K_a und K_i regulär und eindeutig erklärt, auf K_i gleich Null; das andere Potential u'' ist analog für T_2, das ist $K_0 + G$ definiert. Längs $\mathfrak{L}$ bezw. K stimmen u' und u'' mit einander überein, längs K_0 bezw. K_a ist $u'' - u' = \lg U(\varphi)$. Bedeutet nun r den Abstand eines Punktes vom Mittelpunkt des Einheitskreises, der vermittelst der oben erwähnten Abbildung dem Mittelpunkte $0'$ von K_0 entspricht, und betrachten wir das Potential $u'' - \lg r$, so ist dasselbe auf $\mathfrak{L}$ bezw. K gleich u', da hier $\lg r = 0$; auf K_a bezw. K_0 ist $u'' - \lg r$ aber auch gleich u', da ja hier wiederum $u'' - u' = \lg U(\varphi)$ ist. Folglich stimmen die beiden Potentiale u' und $u'' - \lg r$ innerhalb des ganzen Gürtels $G \equiv G'$ überein, d. h. $u = u'$, definiert für T_1, ist die analytische Fortsetzung von $u = u'' - \lg r$ definiert für T_2. Das Potential u ist demnach für das ganze Gebiet $T_1 + T_2$, d. h. für das ganze Gebiet $B = B_1 + K_0$ eindeutig und regulär erklärt, und wird im Punkte $0'$ logarithmisch unendlich.

Bezeichnen wir mit v das zu u gehörige konjugierte Potential, so bildet die analytische Funktion

$$z = e^{-(u + iv)}$$

den einfach zusammenhängenden Bereich B auf das Innere des Einheitskreises konform ab. Damit ist der an die Spitze gestellte allgemeine Abbildungssatz bewiesen. Vom Standpunkte des Uniformisierungstheorems sind wir durch das Vorangegangene, da man ja den Bereich B speziell als die einfach zusammenhängende Ueberlagerungsfläche Φ einer beliebig vorgelegten Riemannschen Fläche F betrachten kann, zu einem Existenzbeweis für die uniformisierende Variable $t(x) = t(xy)$ vom Grenzkreistypus gelangt.

§ 2.

Allgemeiner Beweis des Satzes I.

Wie unter Benutzung des Uniformisierungstheorems der Satz I sich ohne Schwierigkeiten ganz allgemein wird beweisen lassen, soll jetzt im letzten Paragraphen gezeigt werden.

Der Satz in der Gestalt, in der wir ihn jetzt beweisen wollen lautet:

Eine jede Riemannsche Fläche von endlich oder unendlich hoher Blätterzahl und endlich oder unendlich hoher Ordnung des Zusammenhangs kann als Existenzgebiet einer auf ihr eindeutigen analytischen Funktion aufgefaßt werden.

Es liege eine Riemannsche Fläche F ganz allgemeiner Art vor. Die Gesamtheit ihrer Innenpunkte sei wohl definiert. Verzweigungspunkte endlicher Ordnung gelten als Innenpunkte des Gebietes F, ihre Häufungspunkte dagegen, falls sie in unendlicher Anzahl auftreten, gelten als Grenzpunkte des Gebildes, desgleichen Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung; Grenzlinien, falls solche in irgend einem Blatte auftreten, werden nicht als zu dem Bereiche gehörig betrachtet.

Zu dieser Fläche F denken wir uns also die einfach zusammenhängende Ueberlagerungsfläche konstruiert, wie in § 1 angegeben ist, und diese darauf auf das Innere des Einheitskreises konform abgebildet. Bei dieser Abbildung geht das einzelne Exemplar $[F]$, aus welchen die Ueberlagerungsfläche aufgebaut ist, in ein Gebiet E über, das ganz innerhalb des Einheitskreises liegt und in gewissen Punkten oder Strecken bis an die Peripherie des Einheitskreises heranreicht. Die unendlich vielen verschiedenen Exemplare E den verschiedenen Bereichen $[F]$ entsprechend, lagern sich schlicht an einander und füllen den Einheitskreis lückenlos aus.

Wir greifen nun irgend eines der Gebiete heraus. Es ist nach dem Sprachgebrauch der automorphen Funktionen ein Fundamentalbereich der eindeutigen Funktionen auf F, wenn man dieselben als Funktionen der uniformisierenden Variablen t betrachtet. Eine jede solche Funktion nimmt die Gesamtheit ihrer Werte schon in einem der Fundamentalbereiche an. Dem Uebergange von einem beliebigen Werte einer solchen Funktion in E zu dem äquivalenten in einem anderen Fundamentalbereiche entspricht der Uebergang zu einem anderen Zweige von $t(x)$, der mit dem ursprünglichen durch eine lineare Substitution verknüpft ist. Die Gesamtheit aller dieser linearen Substitutionen bildet eine diskontinuierliche

Gruppe, die sich aus gewissen, im allgemeinen nicht endlich vielen, Erzeugenden nach den Regeln der Komposition von Substitutionen aufbaut. In unserem speziellen Falle ist sie eine reelle Substitutionsgruppe, d. h. ihre einzelnen Elemente haben reelle Koeffizienten, denn wir können unsere Betrachtungen vom Einheitskreise auf die obere Halbebene verpflanzen, wobei dann unsere Gruppe die Eigenschaft hat, die reelle Achse in sich überzuführen.

Der Uebergang von der Riemannschen Fläche F zu dem Fundamentalbereiche E hat nun den Wert, daß wir an Stelle der Funktionen, die auf F ausgebreitet sind, die Funktionen des Fundamentalbereiches betrachten können, es sind dies die eindeutigen, automorphen Funktionen, welche bei Anwendung der Substitutionen unserer Gruppe in sich übergehen[1]).

Dieser Veränderung des Schauplatzes unserer Betrachtungen entsprechend nimmt auch die Fragestellung des Satzes I ein verändertes Gesicht an. Wir wollen ja nachweisen, daß unser Gebiet F als Existenzgebiet einer analytischen Funktion aufgefaßt werden kann, und zwar auf dem Wege, daß wir eine Funktion konstruieren, deren Pole sich gegen jeden Grenzpunkt und jede Grenzlinie häufen.

Die Theorie der Poincaréschen Thetareihen liefert uns nun die Möglichkeit automorphe Funktionen mit der gewünschten Verteilung ihrer Pole herzustellen. Ist nämlich $r(t)$ eine rationale Funktion von t der Dimension d, und bezeichnen wir mit

$$S_\kappa = \frac{\alpha_\kappa t + \beta_\kappa}{\gamma_\kappa t + \delta_\kappa}$$

eine Substitution der Gruppe unseres Problems, so lautet die von Poincaré aufgestellte Thetafunktion:

$$\Theta(t) = \sum^{\kappa} r\left(\frac{\alpha_\kappa t + \beta_\kappa}{\gamma_\kappa t + \delta_\kappa}\right)(\gamma_\kappa t + \delta_\kappa)^{-2m},$$

wobei $d = -2m$ gesetzt ist. Sie erfüllt die Relation:

$$\Theta\left(\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right) = (\gamma_i t + \delta_i)^{2m}\,\Theta(t)\,{}^{2}).$$

Die Reihe $\Theta(t)$ konvergiert sicher gleichmäßig und absolut, wenn $2m \geqq 4$. Hat die rationale Funktion in gewissen Punkten inner-

1) Siehe R. Fricke und F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktion, Bd. II, 1. Mitteilg.

2) Siehe Acta mathem., Bd. 1, 1882. Poincaré, Mémoire sur les fonctions Fuchsiennes.

halb des Einheitskreises Pole (der Einfachheit halber nehmen wir an, dass sie alle innerhalb des Fundamentalbereiches E liegen), so hat auch $\Theta(t)$ in diesen Punkten Pole. Hat speziell $r(t)$ nur in einem Punkte innerhalb des Einheitskreises und innerhalb E einen Pol erster Ordnung, so haben wir es mit einer einpoligen Poincaréschen Reihe zu tun. Diese wollen wir im folgenden verwenden; sie sind die Elemente, aus welchen wir die gesuchte Funktion aufbauen werden, den einpoligen Funktionen des ersten Kapitels entsprechend. Der Quotient zweier absolut konvergenten Poincaréschen Reihen der gleichen Dimension ist eine automorphe Funktion des Gebildes.

Aus dem Fundamentalbereiche E greifen wir nun eine abzählbar unendliche Punktmenge M heraus, welche auf die Riemannsche Fläche verpflanzt sich gegen jede und nur gegen jede Grenzlinie und jeden Grenzpunkt der Fläche häuft. Den einzelnen Punkt dieser Menge wollen wir mit a_ν bezeichnen.

Darauf bilden wir eine einpolige Poincarésche Reihe der Dimension $-d$, wobei $d \geqq 4$ sein soll, die als einzigen Pol erster Ordnung den Punkt a_ν hat und bezeichnen sie mit $\Theta_\nu(t)$. Dies tun wir für jeden Punkt der Menge M, und summieren diese sämtlichen Reihen Θ_ν, indem wir noch geeignete Koeffizienten hinzufügen, so daß die Summe absolut und gleichmäßig konvergiert:

$$R(t) = \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} c_\nu \Theta_\nu(t).$$

Da alle Θ_ν von der gleichen Dimension sind, so nimmt $R(t)$ bei der Ausübung einer der Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$ der Gruppe den Faktor $(\gamma_i t + \delta_i)^d$ an, wie jedes einzelne seiner Glieder.

Die Konvergenz ist in dem gleichen Sinne verstanden, wie im Kapitel I; die Bestimmung der Koeffizienten läßt sich also ganz entsprechend durchführen. Wir ziehen innerhalb des Einheitskreises ein System konzentrischer Kreise R_ν so, daß zwischen den Kreisen R_ν und $R_{\nu+1}$ nur der Punkt a_ν der Menge und kein weiterer Punkt von M liegt. Dies ist möglich, weil sich die Punktmenge gegen keinen Innenpunkt des Einheitskreises häuft. Aus dem Fundamentalbereiche schneidet der Kreis R_ν ein Stück E_ν heraus. Der Maximalwert, den die Funktion Θ_ν in diesem Gebiete annimmt sei m_ν. Alsdann wählen wir eine absolut konvergente Zahlfolge, $Z_1, Z_2, \ldots; \sum^{\nu} |Z_\nu| = A$, aus und bestimmen die Koeffizienten nach der Vorschrift:

$$c_\nu = \frac{Z_\nu}{m_\nu}.$$

Die Reihe $\sum c_\nu \Theta_\nu(t) = R(t)$ konvergiert dann in jedem Gebiet G, welches ganz innerhalb E liegt absolut und gleichmäßig, wenn man diejenigen Glieder fortläßt, deren Pole in G fallen, was aber natürlich nur endlich viele sind. Sie bleibt dem Betrage nach immer unterhalb des Wertes der absolut konvergenten Vergleichsreihe, $Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots$.

Aus der Konvergenz innerhalb des Fundamentalbereiches E folgt aber sogleich auch die Konvergenz innerhalb des ganzen Einheitskreises, denn in äquivalenten Punkten nimmt die Reihe bis auf einen durchaus endlichen Faktor die gleichen Werte an. Nähert man sich also einem Punkte der Begrenzung, in welcher zwei Fundamentalbereiche aneinander stoßen, so bleibt der Wert der Reihe unterhalb einer endlichen Grenze.

Die Reihe $R(t)$ dividieren wir nun durch eine beliebige andere absolut konvergente Poincarésche Reihe Q derselben Dimension, die selbst nur endlich viele Pole hat, und erhalten damit in dem Quotienten $\frac{R(t)}{Q(t)}$ eine automorphe Funktion des Gebildes. Diese automorphe Funktion hat die gewünschte Eigenschaft; ihre Pole häufen sich auf der Fläche gegen jeden Punkt der Begrenzung. Verpflanzen wir $\frac{R(t)}{Q(t)}$ wieder auf die Riemannsche Fläche F, so stellt sie daselbst eine eindeutige Funktion dar, die für alle Innenpunkte mit dem Charakter algebraischer Funktionen definiert ist, und F zum Existenzgebiete hat. Damit ist auch für den allgemeinsten Fall einer vorliegenden Riemannschen Fläche der Beweis des Satzes I geführt. Wie man sieht, ist derselbe von dem Typus des Fundamentalbereiches unabhängig.

Lebenslauf.

Ich, Erwin Finlay Freundlich, evangelischer Konfession, bin am 29. Mai 1885 zu Biebrich a/Rh. als Sohn des Fabrikanten P. F. E. Freundlich geboren. Ich besuchte die Vorschule und das Realprogymnasium zu Biebrich bis zur Quarta und trat Ostern 1897 in die Untertertia des humanistischen Gymnasiums zu Wiesbaden ein, das ich Ostern 1903 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Ich wandte mich zuerst dem Studium des Schiff- und Schiffmaschinenbaufaches zu, und studietre zwei Semester auf der Technischen Hochschule zu Charlottenburg, nachdem ich ein halbes Jahr lang auf der Schiffswerft „Vulcan" zu Stettin als Volontär gearbeitet hatte. Aus Gesundheitsrücksichten unterbrach ich dieses Studium für ein Jahr, nahm es aber nicht wieder auf, sondern ließ mich im Herbst 1905 zu Göttingen immatrikulieren, um Mathematik zu studieren. Ich unterbrach meinen Göttinger Aufenthalt nur, um für ein Semester in Leipzig Vorlesungen zu hören, und kehrte dann nach Göttingen zurück. Hier hörte ich Vorlesungen und Uebungen bei den Herren:

Ambronn, Bernstein, Herglotz, Hilbert, Husserl, Klein, Koebe, Minkowski, Müller, Runge, Schwarzschild, Toeplitz, Voigt, Wiechert, Zermelo.

Ich benutze gern die Gelegenheit, an dieser Stelle Herrn Geheimrat Klein, meinen Dank für die mannigfache Anregung und Förderung, die mir während meines Studiums durch ihn zu teil wurden, auszusprechen. Besonders wertvoll wurde mir aber auch das Interesse, das Herr Dr. Koebe meiner Arbeit entgegenbrachte; durch seine persönliche Anregung veranlaßt, habe ich mich erst selbständig mit der Theorie der automorphen Funktionen, insbesondere der in dieser Dissertation behandelten Frage, beschäftigt.



